

# 3 ガスケット上の Loop-Erased Random Walk の 変位の指数と重複対数の法則

16878305 伊藤 玲於

## 目次

1	概要	3
2	イントロダクション	3
3	図形の定義とその上の path の定義	4
4	path の同値関係	7
5	path のループ消し	9
5.1	$3^{N-1}$ -スケールのループ消し	13
5.2	$3^{M-1}$ -スケールのループ消し	14
6	確率測度の再帰性及び recursion	15
7	スケールされた脱出時刻のラプラス変換のふるまい	27
8	コルモゴロフの拡張定理による loop-erased random walk の構成	30
9	loop-erased random walk の変位の指数	33
10	loop-erased random walk の重複対数の法則	39
11	くりこみ群の計算に用いたアルゴリズム	40
11.1	図形の隣接行列	41
11.2	path の配列と上向き三角形の配列を生成するアルゴリズム	42
11.3	$\Phi_1^*$ の係数の計算	45
11.4	タイプの判定	50
12	補遺	51
12.1	スケールされた脱出時刻のラプラス変換の収束に関して	51
12.2	重複対数の法則について	52
12.3	計算に用いたソースコード	58

## 1 概要

pre-3-gasket と呼ばれる図形の上で, ELLF という手法を用いて loop-erased random walk を定義し, 変位の指数と重複対数の法則について調べる.

## 2 イントロダクション

通常のシェルピンスキーの gasket の上で loop-erased random walk は [1] によって研究されている. その中では, path のループを大きい順に消すという ELLF という手法が用いられているが, 本論文では, その手法を 3-gasket と呼ばれる図形上のランダムウォークに対しても適用し, loop-erased random walk を構成する. そこで課題となるのが, 3-gasket が各頂点から延びる辺の数が異なるという意味で一様ではないという点である. 言い方を変えれば, 通常のシェルピンスキーの gasket はその意味では一様なので, 3-gasket にはシェルピンスキーの gasket で用いた方法が直接適用できないということである. それに対する処方箋として本論文では”path の同一視”という道具を新たに用意した. これによって, 3-gasket に対して ELLF が適用できるようになるのである. また [3] では, そこから先の変位の指数や重複対数の法則の解析にくりこみ群と呼ばれる手法を用いている. 本論文でもそれにならって, くりこみ群の手法を用いて解析を行っている. 得られた結果が以下の定理である.

**定理 1** (3-gasket 上の無限長の loop-erased random walk の存在). 3-gasket 上に無限長の *loop-erased random walk* が構成できる.

**定理 2** (loop-erased random walk の変位の指数). 任意の  $s > 0$  に対して, ある正の定数  $C_{10}, C_{11}$  が存在して,

$$C_{10}n^{s\nu} \leq E[|X(n)|^s] \leq C_{11}n^{s\nu}$$

が成り立つ. ただし  $\lambda = \frac{2\sqrt{417414}+1431}{735} = 3.70496829\dots$ ,  $\nu = \frac{\log 3}{\log \lambda}$  とする.

**定理 3** (loop-erased random walk  $X$  に対する重複対数の法則). ある正の定数  $C_{12}, C_{13}$  が存在して,  $\psi(n) := n^\nu(\log \log n)^{1-\nu}$  とするとき,

$$C_{13} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \leq C_{12}, \quad P - a.s.$$

が成り立つ. ただし  $\nu$  は定理 2 と同じとする.

また, 本論文では新たに, 通常のシェルピンスキーの gasket や 3-gasket 等の”同じ部類の図形”に対するくりこみ群を統一的に計算するアルゴリズムを構成した.

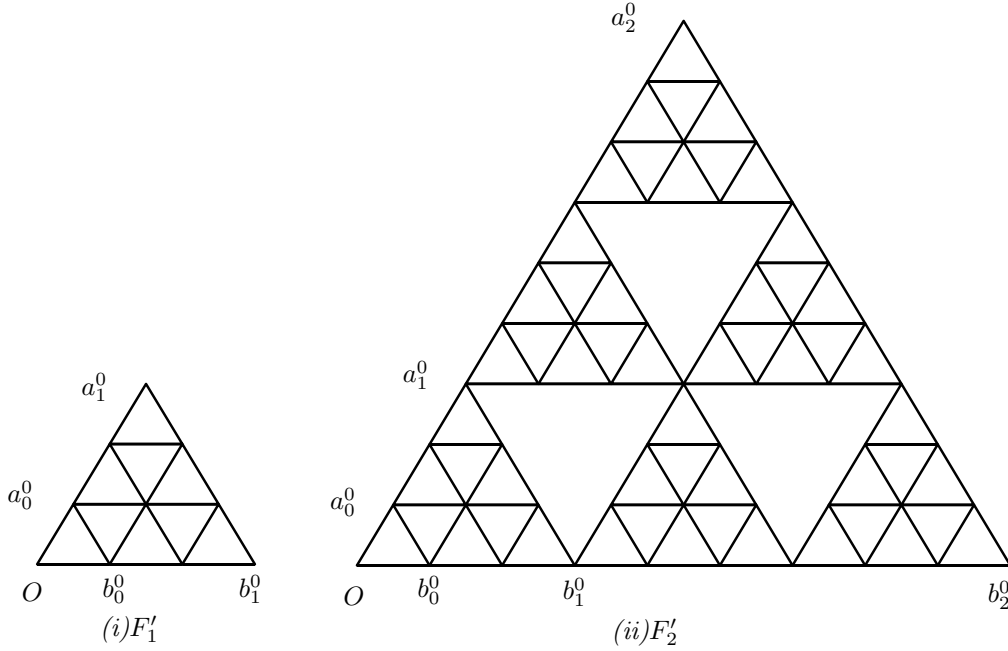
### 3 図形の定義とその上の path の定義

主結果について議論を始める前に, 3-gasket と呼ばれる図形は一般的なものではないので, 3-gasket の正確な定義をしなければならない. したがって以下では, 初めに 3-gasket と呼ばれる図形の正確な定義について述べる.

**定義 3.1** (pre3-gasket).  $O = (0, 0)$ ,  $a_0^0 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $b_0^0 = (1, 0)$  として  $F'_0 := \Delta Oa_0^0b_0^0$  とする. このとき,  $a_N^0 = 3^N a_0^0$ ,  $b_N^0 = 3^N b_0^0$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$  として, 図形の列  $\{F'_N\}$  を

$$F'_{N+1} = F'_N \cup (F'_N + a_N^0) \cup (F'_N + b_N^0) \cup (F'_N + 2a_N^0) \cup (F'_N + 2b_N^0) \cup (F'_N + 2a_N^0 + b_N^0)$$

と帰納的に定める. (図 (i) 及び (ii) を参照)



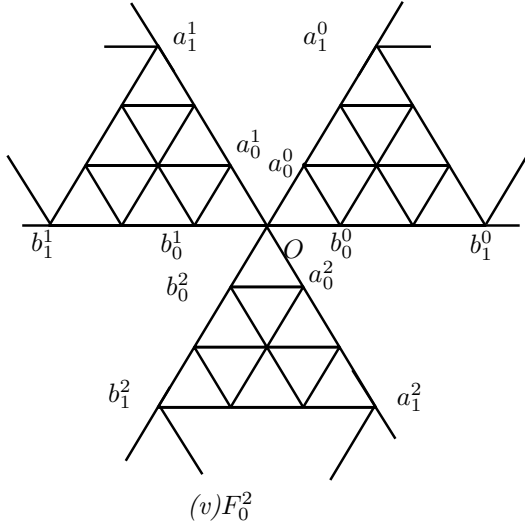
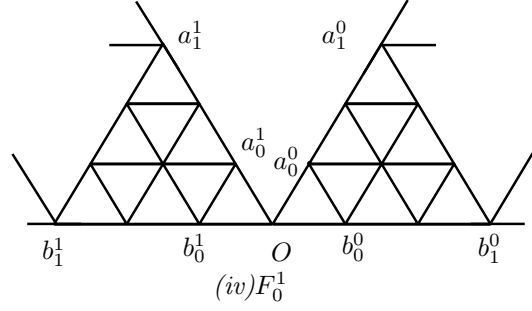
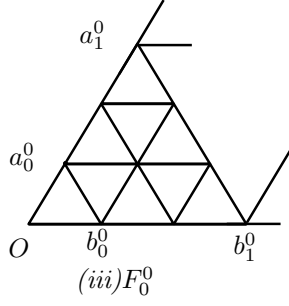
このとき

$$F_0^0 := \bigcup_{N=1}^{\infty} F'_N$$

を **pre3-gasket** という.

$F_0^0$  と  $y$  軸に関して対称な図形を  $F_0^0$  に加えたものを  $F_0^1$ ,  $F_0^0$  と  $y$  軸に関して対称な図形と,  $F_0^0$  を原点を中心にして  $\frac{2\pi}{3}$  負の向きに回転させた図形を  $F_0^0$  に加えたものを  $F_0^2$  とする.

ここで,  $a_N^0, b_N^0$  と  $y$  軸に関して線対称な点をそれぞれ  $a_N^1, b_N^1$ , 上記の回転操作によって  $a_N^0, b_N^0$  が対応する点を  $a_N^2, b_N^2$  とする. (図 (iii) から (v) を参照)



$i = 0, 1, 2$  として,  $G_0^i, E_0^i$  をそれぞれ  $F_0^i$  の点の集合, 辺の集合とすると, グラフの一般的な表し方によれば  $F_0^i = (G_0^i, E_0^i)$  であることに注意する. またこの記号の下,

$$G_N^i := \{3^N x | x \in G_0^i\}$$

$$E_N^i := \{3^N \overline{xy} | \overline{xy} \in E_0^i\}$$

$$\mathcal{N}_N^i(x) := \{y \in G_N^i | \overline{xy} \in E_N^i\}$$

とする. 特に  $\mathcal{N}_N^i(x)$  のことをグラフ  $(G_N^i, E_N^i)$  上の点  $x$  の **nearest neighbors** と呼ぶことにする.

図形が定まったのでその上の path を考えることができる.

**定義 3.2** (path の集合).  $i = 0, 1, 2$  として  $F_0^i$  の上の有限歩の path の集合  $W^i, W^{i*}$  を

$$W^i := \{w = (w(0), \dots, w(n)) | w(0) \in G_0^i, w(j) \in \mathcal{N}_0^i(w(j-1)), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\},$$

$$W^{i*} := \{w \in W^i | w(0) = O\}$$

と定義する.

以下では  $w = (w(0), \dots, w(n)) \in W^i$  としたとき, path  $w$  の長さを  $l(w) := n$  と表す.

また図形の上の点への到達時刻 (到達歩数) を定義することによって, path を特徴づけることができる.

**定義 3.3** (到達時刻 (hitting time)). まず  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $A$  に対して,  $w \in W^i$  とするとき, 以下のような写像を定める;

$$T_A(w) := \inf\{j \geq 0 | w(j) \in A\}.$$

これを用いて  $G_M^i (M \in \mathbb{N}, i = 0, 1, 2)$  への  $w \in W^i$  の  $k$  回目の到達時刻 (**hitting time**) を以下のように定める;

$$\begin{aligned} T_{i,0}^M(w) &:= T_{G_M^i}(w), \\ T_{i,k}^M(w) &:= \inf\{j > T_{i,k-1}^M(w) | w(j) \in G_M^i \setminus \{w(T_{i,k-1}^M(w))\}\}. \end{aligned}$$

ここで  $m_w$  は  $T_{i,m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とする.

また  $path$  が明らかな場合, 以下では  $T_{i,k-1}^M(w) = T_{i,k-1}^M$  のように略記することもある.

**注意 3.4.** 到達時刻  $T_{i,k}^M(w)$  とは  $path$  が同じ  $G_M^i$  の点を連続して訪れたときは 1 回とみなすという条件の下,  $G_M^i$  の点を  $k$  回目に訪れる時刻である.

上で定義した到達時刻を使えば  $W^{i*}$  に属する  $path$  を以下のように特徴づけることができる.

**定義 3.5** (両端固定の  $path$  集合).

$$\begin{aligned} W_N^0 &:= \{w \in W^{0*} | w(l(w)) = a_N^0, l(w) = T_{0,1}^N\}, \\ V_N^0 &:= \{w \in W^{0*} | w(l(w)) = a_N^0, w(T_{0,1}^N) = b_N^0, l(w) = T_{0,2}^N\}, \\ W_N^1 &:= \{w \in W^{1*} | w(l(w)) = a_N^0 \quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^1 \quad (l(w) = T_{1,1}^N)\}, \\ V_N^1 &:= \{w \in W^{1*} | w(l(w)) = a_N^0, w(T_{1,1}^N) = b_N^0 \quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^1, w(T_{1,1}^N) = b_N^1 \quad (l(w) = T_{1,2}^N)\}, \\ W_N^2 &:= \{w \in W^{2*} | w(l(w)) = a_N^0 \quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^1 \quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^2 \quad (l(w) = T_{2,1}^N)\}, \\ V_N^2 &:= \{w \in W^{2*} | w(l(w)) = a_N^0, w(T_{2,1}^N) = b_N^0 \quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^1, w(T_{2,1}^N) = b_N^1 \\ &\quad \text{または} \quad w(l(w)) = a_N^2, w(T_{2,1}^N) = b_N^2 \quad (l(w) = T_{2,2}^N)\}. \end{aligned}$$

ここで後々のために  $\Gamma^i := \{w \in W^{i*} | w(k) \neq w(l), 0 \leq k < l \leq l(w), l(w) \in \mathbb{N}\}$  とするとき,

$$\hat{W}_N^i := W_N^i \cap \Gamma^i,$$

$$\hat{V}_N^i := V_N^i \cap \Gamma^i,$$

とここで定義しておく.

## 4 path の同値関係

以下では,  $G_N^i, i = 1, 2$  の点に対して同値関係を定めることによって, その構造がその上の path の集合  $W^{i*}, i = 1, 2$  の上の同値関係を定めて, その同値関係による商集合が  $W^{0*}$  とみなせることを見てゆく.

まずその準備として  $G_0^i, i = 0, 1, 2$  の任意の点がある 2 つのベクトルの線形結合の形で一意的に表せることを述べる.

**命題 4.1** (点の表示の一意性).  $i = 0, 1, 2$  とする.

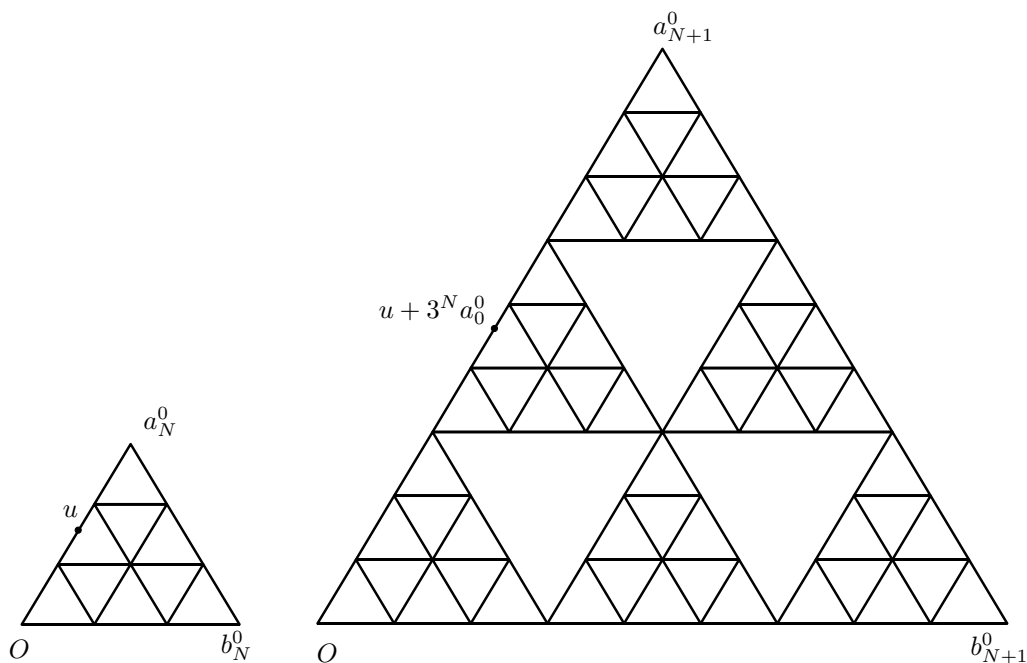
任意の  $u \in G_0^i$  に対して, ある  $m_u, n_u \in \mathbb{Z}_+$  と, ある  $j \in \{0, 1, 2\}$  が一意的に定まって,  $u$  は以下のように一意的に表示できる;

$$u = m_u a_0^j + n_u b_0^j.$$

**証明.** *pre3-gasket* の作り方から示すことができる. また  $i = 0$  の場合のみ示せば  $i = 1, 2$  はそれに線対称, または回転させた図形を付け加えただけなので, この主張が示されたことになる.

まず  $F'_0 \cap F_0^0$  という図形に属する点全ては  $O, a_0^0, b_0^0$  であるから明らかである.

$F'_N \cap F_0^0$  という図形の点が命題の主張にあるような一意的な表示を持ったとすると,  $F'_{N+1} \cap F_0^0$  の点は  $F'_N \cap F_0^0$  の点の平行移動 ( $F'_{N+1}$  の作り方より  $m, n \in \mathbb{N}$  とすると  $ma_N^0 + nb_N^0$  の形でこの移動は表される) なので,  $F'_{N+1} \cap F_0^0$  の点も命題の主張の一意的な表示を持つ. 数学的帰納法より,  $F_0^0$  の点, つまり任意の  $u \in G_0^0$  に対して命題の主張が成り立つ. (下図を参照)  $\square$



この命題を用いて *pre3-gasket* の上の点の同値関係を以下のように定義する.

**定義 4.2** (点に対する同値関係).  $i = 1, 2$  とする.  $u, v \in G_0^i$  に対して  $u \sim_i v$  であるとは,  $u = m_u a_0^k + n_u b_0^k, v = m_v a_0^l + n_v b_0^l$  が以下を満たすことである;

(ただし  $m_u, n_u, m_v, n_v \in \mathbb{Z}_+$  で,  $k, l \in \{0, 1\} (i = 1)$  または  $k, l \in \{0, 1, 2\} (i = 2)$ )

$$m_u = m_v, \quad \text{かつ} \quad n_u = n_v.$$

あとで使うので辺に対しても同値関係を定めておく.

**定義 4.3** (辺の同値関係).  $i = 1, 2$  とする.  $\overline{x_1 y_1}, \overline{x_2 y_2} \in E_0^i$  が  $\overline{x_1 y_1} \sim_i \overline{x_2 y_2}$  であるとは以下を満たすことである;

$$x_1 \sim_i x_2 \quad \text{かつ} \quad y_1 \sim_i y_2,$$

または

$$x_1 \sim_i y_2 \quad \text{かつ} \quad y_1 \sim_i x_2.$$

上で定義した点の同値関係を用いて path 空間  $W^{i*}, i = 1, 2$  の同じ長さの path に対して, 同値関係を以下のように定めることができる.

**定義 4.4** (path の同値関係).  $i = 1, 2$  とする.  $l(v) = l(w)$  を満たす  $v, w \in W^{i*}$  に対して  $v \sim_i w$  であるとは以下を満たすことである;

$$v(j) \sim_i w(j), \quad j = 0, 1, \dots, l(v).$$

以上のように path 空間  $W^{i*}, i = 1, 2$  の上に同値関係を定義したが, それによる商集合の元が以下で定める nearest neighbors の意味で再び path となることを示し, 商集合が  $W^{0*}$  とみなせることを見ていく.

**定義 4.5** (path 集合の商集合上の nearest neighbors).  $i = 1, 2$  とする.  $[x] \in G_0^i / \sim_i$  とするとき  $[x]$  の nearest neighbors を以下のように定める;

$$\mathcal{N}_0^{i*}([x]) := \{[y] \in G_0^i / \sim_i \mid \text{ある } a \in [x] \text{ と, ある } b \in [y] \text{ があって } b \in \mathcal{N}_0^i(a)\}.$$

**注意 4.6.** このようにして nearest neighbors を定義すると  $[w] = ([w(0)], \dots, [w(l(w))]) \in W^{i*} / \sim_i$  は  $[w(j)] \in \mathcal{N}_0^{i*}([w(j-1)]), j = 1, \dots, l(w)$  となり  $G_0^i / \sim_i$  上の path となる.

ここで  $F_0^i / \sim_i$  と  $F_0^0$  が同じ図形とみなせることを示した上で,  $[w]$  が  $G_0^0$  上の path となっていることを以下で確認する.  $F_0^i / \sim_i := (G_0^i / \sim_i, E_0^i / \sim_i)$  という集合は, 上で定義した nearest neighbors を各点  $[x] \in G_0^i / \sim_i$  で考えることにより, 各点どうしのつながりが分かり,  $F_0^0$  と同じ形をしていることが分かる.

よって,  $[x] \in G_0^i / \sim_i$  ( $x = ma_0^j + nb_0^j, m, n \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1\} \text{ or } \{0, 1, 2\}$ ) という商集合の点を,  $a = ma_0^0 + nb_0^0$  なる  $a \in G_0^0$  と同一視すれば ( $[x]$  を  $a$  と書き直せば),  $F_0^i / \sim_i$  を  $F_0^0$  とみなすことができる. この同一視を  $I[x] = a$  とかく.  $w \in W^{i*}$  は  $[w] = ([w(0)], \dots, [w(l(w))]) \in W^{i*} / \sim_i$  をとることにより  $I[w] = (I[w(0)], \dots, I[w(l(w))]) \in G_0^0$  となるから,  $W^{0*}$  の  $\text{path}(I[w(0)], \dots, I[w(l(w))])$  と対応させることができる.

**定義 4.7** (path の同一視). 注意 4.6 で定まる, path の対応を  $\eta$  と書く. すなわち,  $\eta(w) = I[w] = (I[w(0)], \dots, I[w(l(w))]) \in W^{0*}, w \in W^{i*}$  である. また, 形式的に  $w \in W^{0*}$  に対しては  $\eta(w) = w$  と定めておく. また  $l(w) = l([w]) = l(\eta(w))$  に注意する.



## 5 path のループ消し

上で定義された path の同値関係を考えると, 3-gasket のグラフは各点から延びる辺の本数が一様でないにも関わらず,  $i = 0$  の場合に帰着して考えることができ, 普通の gasket のような path のループ消去を考えることができる. グラフの各点から延びる辺の本数が異なるというタイプの gasket 上の, path のループ消去に対する処方箋である.

以下では path のループをまず定義して, それからループ消去という path に対する作用を構成する.

**定義 5.1** (path のループ).  $i = 0, 1, 2$  とする.  $w \in W^{i*}$  に対して, ある  $j, k (0 \leq j < k \leq l(w))$  が存在して,  $w(j) = w(k)$  かつ  $l$  が  $j < l < k$  ならば  $w(l) \neq w(j)$  となるとき, path の切片  $[w(j), \dots, w(k)]$  を  $w(j)$  でのループという.

これからここで定義したループを, ループの”サイズ”順に消すことを考える. そのための準備として, ループ消し作用素, 脱出時刻とスケルトン, ループのサイズを順に定義してゆく.

**定義 5.2** (ループ消し作用素).  $i = 0, 1, 2$  とする. まず原点  $O$  出発の path  $w \in W^{i*}$  に対して, 以下のような自然数列を定義する;

$$s_0 := \sup\{k > 0 \mid w(k) = O\},$$

$$s_j := \sup\{k \mid w(k) = w(s_{j-1} + 1)\}.$$

この時,  $s_j > s_{j-1} + 1$  ならば path の切片  $[w(s_{j-1} + 1), \dots, w(s_j)]$  は (多重) ループである. この準備の下, ループ消し作用素  $L : W^{i*} \rightarrow \Gamma^i$  を以下のように定義する;

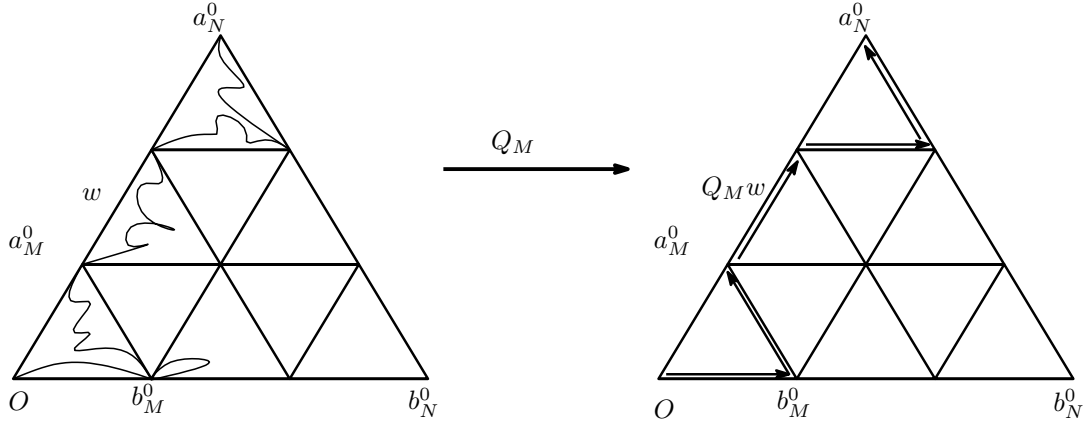
$$Lw := (w(s_0), w(s_1), \dots, w(s_{l(w)})).$$

ここで定義された”ループ消し”は”できた順のループ消去”であることに注意する. また到達時刻を使って以下のようなスケールの違う図形の上 path どうしの対応を与えることができる.

**定義 5.3** (粗視化写像 (coarse graining map)).  $w \in W^{i*}, M \in \mathbb{Z}_+, i = 0, 1, 2$  とするとき,

$$(Q_M w)(j) := w(T_{i,j}^M(w)), \quad j = 0, \dots, m_w.$$

ただし,  $m_w = m_w(N)$  は  $T_{i,m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とする. (下図を参照)



**定義 5.4** ( $3^M$ -三角形).  $i = 0, 1, 2$  とするとき,  $\mathcal{T}_M^i$  で一辺が  $3^M$  の  $F_0^i$  の上向き閉三角形全体とし, その元を  $3^M$ -三角形という.

**定義 5.5** (脱出時間とスケルトン).  $i = 0, 1, 2$  とする.  $m_w$  を  $T_{i, m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とするとき,  $w \in W^{i*}$  の到達時刻の部分列と上向き三角形の列  $\{\Delta_j\} \subset \mathcal{T}_M^i$  を以下のように定める;

まず

$$T_{i,0}^{ex,M} := T_{i,0}^M$$

とする. 次に,  $w(T_{i,1}^M)$  と  $w(T_{i,0}^M)$  を含む  $\mathcal{T}_M^i$  の元を  $\Delta_1$  とおく. そして,

$$j(k, i) := \min\{j \geq 0 \mid j < m_w, T_{i,j}^M > T_{i,k-1}^{ex,M}, w(T_{i,j+1}^M) \notin \Delta_k\}$$

とする. ただし, もし最小値がないときは  $j(k, i) = m_w$  とする. これを用いて,

$$T_{i,k}^{ex,M} := T_{i,j(k,i)}^M$$

と定め, これを  $\Delta_k$  の脱出時刻という. そして,  $w(T_{i,k}^{ex,M})$  と  $w(T_{i,j(k,i)+1}^M)$  を含む  $\mathcal{T}_M^i$  の元を  $\Delta_{k+1}$  とする. このようにして定めた到達時刻の部分列を脱出時刻 (exit time) といい,  $3^M$ -三角形の列  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_l\}$  を  $3^M$ -スケルトンといい  $\sigma_M^i(w)$  とかく.

**定義 5.6** (ループのサイズ).  $i = 0, 1, 2$  とし,  $w \in W^{i*}$  とするとき  $[w(j), \dots, w(j+j_0)]$  で  $w$  の持つループを表すとする. この条件の下, ある  $M \in \mathbb{Z}_+$  で,

$$M = \max\{N' \mid w(j) = w(j+j_0) \in G_{N'}^i\}$$

かつ,  $|\cdot|$  をユークリッド距離とするとき  $d := \max\{|w(k) - w(l)|; j < k < l \leq j+j_0\}$  とすると,

$$d \geq 3^M$$

という条件を満たすとき, このループは  $3^M$ -スケールであるという.

また, 脱出時刻の定義からスケルトンの元は以下のように種類分けすることができる.

**定義 5.7** (スケルトンの元のタイプ).  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, w \in W_N^i \cup V_N^i, i = 0, 1, 2$  とするとき, ある  $k \in \mathbb{N}$  があって  $\sigma_M^i(w) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  となっているとする.

この時、任意の  $j = 1, \dots, k-1$  に対してある  $n = n(j) \in \mathbb{N}$  が存在して、 $T_{i,j-1}^{ex,M}(w) = T_{i,n}^M(w)$  を満たす。三角形  $\Delta_j \in \sigma_M^i(w)$  について、もし  $T_{i,j}^{ex,M}(w) = T_{i,n+1}^M(w)$  であるならば、 $\Delta_j$  はタイプ 1 であるという。もし  $T_{i,j}^{ex,M}(w) = T_{i,n+2}^M(w)$  であるならば、 $\Delta_j$  はタイプ 2 であるという。

先行研究ではこの準備の下、以下で大きい順のループ消しを帰納的に定義していくが、3-gasket でそれを行うためにはもう少し準備がいる。それは、3-gasket が各点から延びる辺の本数が一様でないことに起因する。以下で定義されるスケール順のループ消しは、大きいサイズのループを定義した後、 $w \in W_N^0 \cup V_N^0$  に対して、その path の切片を考えスケール変換等を施すことによって path を同一視して、先に定義してあった大きいサイズのループ消しを適用する、というのが大まかな流れである。したがって必要な準備の部分は path の同一視である。

**定義 5.8** (ループをスケルトンの三角形に折り返す).  $M, N \in \mathbb{N} (M < N)$ ,  $w \in W_N^0 \cup V_N^0$  とするとき、 $w$  には  $3^M$ -スケール以上のループはないものとする。  $w$  の切片  $w_j = w|_{\Delta_j} := [w(k)|T_{0,j-1}^{ex,M} \leq k \leq T_{0,j}^{ex,M}]$  に対して、以下のような操作を定義する；

1. path の切片を分割する；

(1)  $\Delta_j$  がタイプ 1 のとき： $w_1^j := w_j$  とする。

(2)  $\Delta_j$  がタイプ 2 のとき： $T_{0,j-1}^{ex,M} = T_{0,n}^M$  となる  $n \in \mathbb{N}$  が存在するのでそれを固定するとき、もし  $w_j$  が点  $w(T_{0,n+1}^M)$  を通るループを持たないならば、

$$w_1^j := \{w(k)|T_{0,j-1}^{ex,M} \leq k \leq T_{0,n+1}^M\}, w_2^j := \{w_j(k)|T_{0,n+1}^M \leq k \leq T_{0,j}^{ex,M}\}$$

と定義する。もし  $w_j$  が点  $w(T_{0,n+1}^M)$  を通るループを持つならば、

$$o_t := \max\{k|w_j(k) = w(T_{0,n+1}^M)\}$$

$w_j(k)$  の  $1 \leq k \leq o_t$  の範囲内で点  $w(T_{0,n+1}^M)$  を通るループ以外の部分を  $w_1^j$ ,  $w_j$  の  $w_1^j$  以外の部分を  $w(T_{0,n+1}^M)$  出発の path としてつなげたものを  $w_2^j$  とする。より具体的には、例えば  $w_j$  が  $w(T_{0,n+1}^M)$  を通るループをただ一つ持っているとき、そのループを  $[w(t), \dots, w(t+t_0)]$ ,  $(T_{0,j-1}^{ex,M} \leq t < T_{0,n+1}^M)$  とする。また、

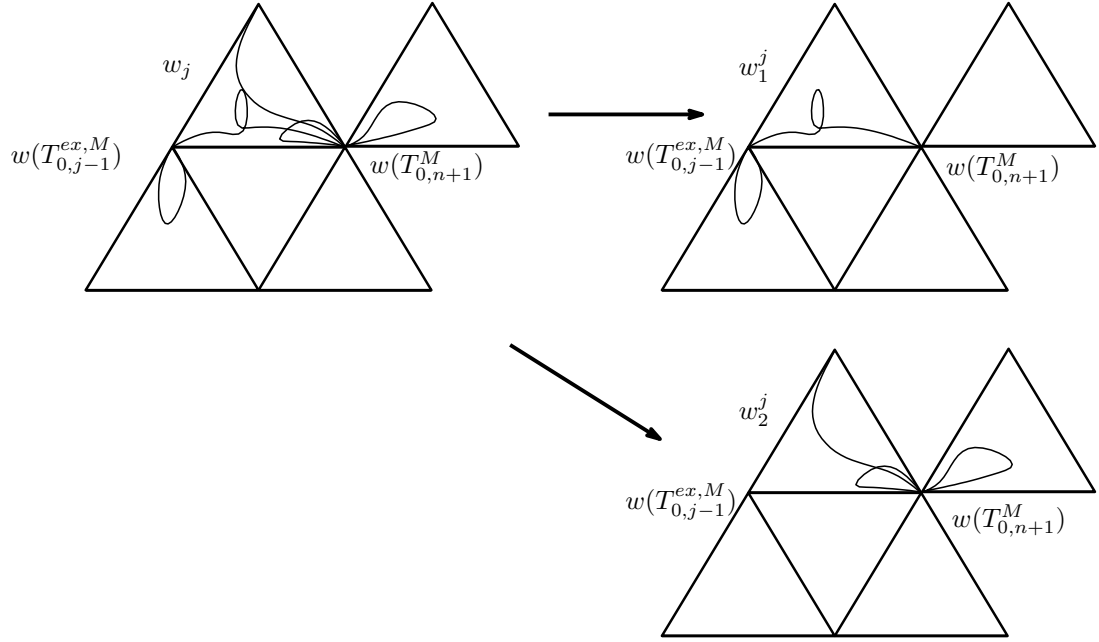
$$h_t := \min\{k > t+t_0|w(k) = w(T_{0,n+1}^M)\}$$

とすると、

$$w_1^j = (w(T_{0,j-1}^{ex,M}), \dots, w(t), w(t+t_0+1), \dots, w(h_t+1))$$

$$w_2^j = (w(T_{0,n+1}^M), \dots, w(t+t_0), w(t+1), \dots, w(T_{0,n+1}^M), w(h_t+1), \dots, w(T_{0,j}^{ex,M}))$$

となる．(下図参照)



2. 分割した path について，同一視  $\eta$  を用いてループなどの構造を一つの三角形に折り返す；

- (1)  $\Delta_j$  がタイプ 1 のとき：上で得られた  $w_1^j$  に対して， $w_1^j(0) = w_j(0) = w(T_{0,j-1}^{ex,M})$  を原点  $O$  に， $w_1^j(l(w_1^j)) = w(T_{0,n+1}^M)$  を  $a_M^0$  にそれぞれ写すような線形写像が一意的に定まるのでそれを  $\mu_1$  とするとき， $\eta \circ \mu_1(w_1^j)$  とすることによって， $w_1^j$  を  $F'_M$  上の原点から延びる path と同一視する．
- (2)  $\Delta_j$  がタイプ 2 のとき：上で得られた  $w_1^j, w_2^j$  に対して， $w_1^j(0)$  を原点  $O$  に， $w_1^j(l(w_1^j))$  を  $b_M^0$  にそれぞれ写す線形写像を  $\mu_1$ ， $w_2^j(0)$  を原点  $O$  に， $w_2^j(l(w_2^j))$  を  $a_M^1$  にそれぞれ写す線形写像を  $\mu_2$  とそれぞれおくと，

$$\eta \circ \mu_1(w_1^j), \eta \circ \mu_2(w_2^j)$$

によって  $w_1^j, w_2^j$  を， $F'_M$  上の原点から延びる path と  $F'_M$  を  $y$  軸について反転させたグラフの上の原点から延びる path にそれぞれ同一視する．

3.  $In(w_j)$  の構成；

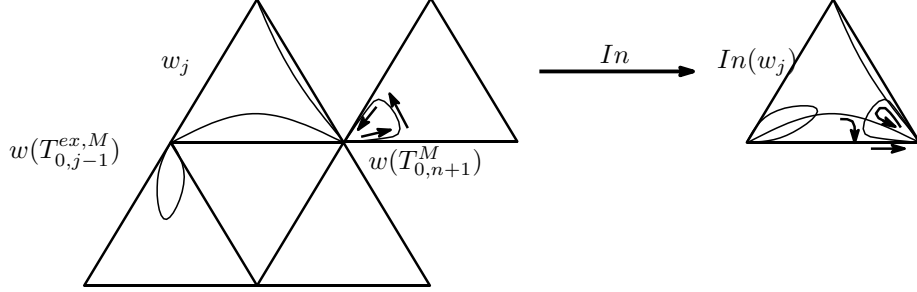
- (1)  $\Delta_j$  がタイプ 1 のとき： $In(w) := \eta \circ \mu_1(w_1^j)$  とする．これは  $F'_M$  上の path になる．
- (2)  $\Delta_j$  がタイプ 2 のとき： $b := (b_M^0, 0)$  とベクトル  $b$  を定めるとき， $b + \eta \circ \mu_2(w_2^j)$  ( $\eta \circ \mu_2(w_2^j)$  を  $b$  だけ平行移動) の持つループが  $\eta \circ \mu_1(w_1^j)$  とぶつかるとき，ぶつかるループが 1 つであるならば，そのループを  $b + [l_m] = (b + [w_2^j(t)], b + [w_2^j(t+1)] \dots, b + [w_2^j(t+t_0)])$ ， $m \in \mathbb{N}$  とおくと，(本当は  $b + [\mu_2(w_2^j(t))]$  と書くところを  $\mu_1, \mu_2$  を省略して  $b + [w_2^j(t)]$  などと書いた．以下も同様である．)

$$k_m = \min\{k | \{\eta \circ \mu_1(w_1^j)(k) \cap b + [l_m]\} \neq \emptyset\}$$

となる  $k_m$  をとる．このとき， $\eta \circ \mu_1(w_1^j)(k_m) = b + [w_2^j(t_k)]$  であるとするならば，

$$In(w_j) := ([w_j(0)], \dots, [w_j(k_m)], b + [w_2^j(t_k + 1)], \dots, b + [w_2^j(t + t_0)], b + [w_2^j(t + 1)], \dots, b + [w_2^j(t_k)], [w_j(k_m + 1)], \dots, b + [w_2^j(0)], \dots, b + [w_2^j(t_k)], b + [w_2^j(t_k + t_0 + 1)], \dots, b + [w_2^j(l(w_2^j))])$$

と定義する．ぶつかるループが2つ以上の場合も全てのループに対して，同様の操作をして  $In(w_j)$  を定義する． $In(w_j)$  は  $F'_M$  上の path となる．(下图参照)



**注意 5.9.** 以下のループ消しに出てくる記号として， $w$  を  $F'_M$  上の  $O$  出発で  $a_M^0$  に到達して停止する path とするとき，path 切片の集合  $In^{-1}(w)$  を  $\sigma_M^0(w)$  の元 (一つしかない) に対して，今，グラフ  $F_0^0$  上の上向き  $3^M$ -三角形  $\Delta \in \mathcal{T}_M^0$  が一つ固定されているとき，

$$In^{-1}(w) := \{w'(T_{0,j-1}^{ex,M} \leq t \leq T_{0,j}^{ex,M}) | In(w'|_{\Delta_j}) = w, \Delta_j = \Delta, w' \in W_N^0 \cup V_N^0\}$$

と定める．

## 5.1 $3^{N-1}$ -スケールのループ消し

これまでの準備の下， $w \in W_N^0 \cup V_N^0$  のループ消しを以下で帰納的に定義する．

まずは， $3^{N-1}$ -スケールのループを消すことを考える． $w$  には  $W_N^0 \cup V_N^0$  の定義から， $3^N$ -スケールのループはないことに注意する．

- (1) 粗視化した後，同一視  $In$  によって  $F'_1$  上の path と同一視する；

$w' = 3^{-(N-1)}Q_{N-1}w$  とする．このとき， $w'(j) = 3^{-(N-1)}w(T_{0,j}^{N-1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_w(N-1)$  である．同一視  $In$  により  $In(w')$  は  $F'_1$  上の path とみなせる．

- (2) (1) で得られた  $F'_1$  上の path からループを消す；

$$In(w')_{LE} := L(In(w')) = (In(w')(s_0), In(w')(s_1), \dots, In(w')(s_n)).$$

ただし，

$$s_0 = \sup\{k | In(w')(k) = O\}, s_j = \sup\{k | In(w')(k) = In(w)(s_{j-1} + 1)\}$$

で，

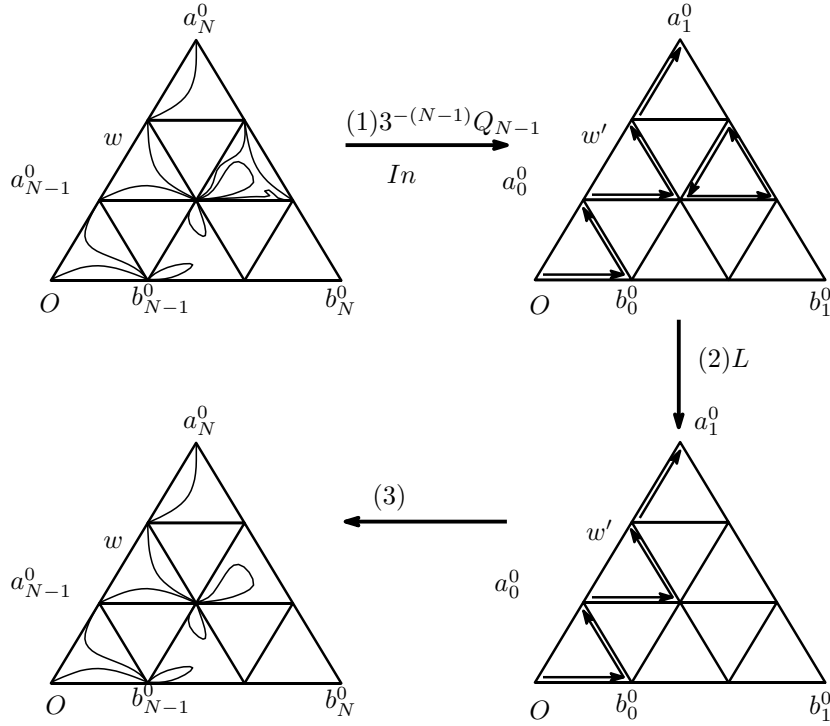
$$In(w')(s_0) = O, In(w')(s_n) = a_1^0$$

である．

- (3) 細かい構造を戻す； $In^{-1}(In(w')_{LE})$  の中から， $w'$  と  $3^N$ -スケルトンが一致するものが一意的に定まるのでそれを取り  $w'_{LE}$  とする． $w'_{LE}$  に対して， $3^{-(N-1)}Q_{N-1}w$  で消えた構造を戻したものを  $L_{N-1}w$  とおく．

以上の操作によって， $L_{N-1}w$  は  $w$  の  $3^{N-1}$ -スケールのみのループが消えた path となる．ここで (1) の coarse grainning  $Q_{N-1}$  によっていったん消えてしまった  $w$  の  $3^{N-2}$ -スケール以下のループが，(3) によって

path に戻されていることに注意する．(下図を参照)



## 5.2 $3^{M-1}$ -スケールのループ消し

以下では, 帰納的にループ消しを構成したいので,  $w$  の  $3^M$ -スケールまでのループが消えたと仮定して, その結果を  $w'$  で表すとき,  $3^{M-1}$ -スケールのループを消すことを考える.

簡単に言えば,  $w'$  の切片に対して, 上で定義した  $3^{N-1}$ -スケールのループ消しに帰着させて  $3^{M-1}$ -スケールのループを消すのである. したがって,  $w'$  の切片を, まずは  $3^{N-1}$ -スケールでのループ消しの (1) の  $F'_1$  上の path と同一視というところから考えなければならない.

- (i) まずは脱出時刻ごとに path を区切った後, それぞれの path の切片に対して規格化と粗視化  $3^{-(M-1)}Q_{M-1}$  を行う;

$\sigma_M^0(w')$  に対して,  $w'' = 3^{-(M-1)}Q_{M-1}(w'|_{\Delta}), \Delta \in \sigma_M^0(w')$  と定義する.  
 $(w'' = (3^{-(M-1)}w'(T_{0,j}^{M-1}), \dots, 3^{-(M-1)}w'(T_{0,j+j_0}^{M-1})))$  の形になっている

- (ii)  $In$  を用いて  $F'_1$  上の path と同一視する;

(i) で得られた  $w''$  に対して,  $In(w'')$  を考える. ここで  $w''$  は  $In(w'')$  によって  $F'_1$  上の path と同一視できるので,  $3^{N-1}$ -スケールのループ消しの手順にしたがって  $3^0$ -スケールのループを消すことを考える.

$w''$  は coarse grainning  $Q_{M-1}$  の結果なので  $3^{M-2}$ -スケール以下構造は無視され, このループ消去によって消えるのは  $3^{M-1}$ -スケールのループであることに注意する.

- (iii) (ii) で得られた  $F'_1$  上の path のループを消す;

$$s_0 = \sup\{k | \text{In}(w'')(k) = O\},$$

$$s_j = \sup\{k | \text{In}(w'')(k) = \text{In}(w)(s_{j-1} + 1)\}$$

とするとき,

$$\text{In}(w'')_{LE} = L(\text{In}(w'')) := (\text{In}(w'')(s_0), \dots, \text{In}(w'')(s_n)).$$

ただし,

$$\text{In}(w'')(s_0) = O,$$

$$\text{In}(w'')(s_n) = a_1^0$$

である.

(iv) 細かい構造を戻す ;

$\text{In}^{-1}(\text{In}(w'')_{LE})$  の中で,  $3^M$ -スケルトンが  $w''$  に一致するものが一意的に存在するのでそれを取り,  $w''_{LE}$  とおく.  
 $w''_{LE}$  に  $3^{-(M-1)}Q_{M-1}w'|_{\Delta}$  で失われた構造を付け足したものを  $L_{M-1}(w'|_{\Delta})$  とおく. それを  $\sigma_M^0(w')$  にしたがって貼り合わせ, その結果できた path を  $L_{M-1}w'$  と表す. こうしてできた  $L_{M-1}w'$  には  $3^{M-1}$ -スケール以上の大きさのループはなくなっていることに注意する.

## 6 確率測度の再帰性及び recursion

このようにして path のループ消し  $L$  を帰納的に定義したが, 次はこれを使って確率測度を  $\hat{W}_N^0 \cup \hat{V}_N^0$  の path に対して定義をし, 歩数のラプラス変換の様子を見ることで得られる不等式を使い, 変位の指数や重複対数の法則について論じてゆく. まずはそのために,  $L$  を使って確率測度を定め, その測度が path の乗る図形と同様に再帰的に定義され, 確率測度に対応する母関数がある再帰式 (recursion) を満たすことを示す.

また, 前章で  $\text{In}$  という操作を導入したが, このことによって確率測度の再帰性の関係式に現れる確率測度が  $i = 0$  の図形に由来するもの一種類となり, 本質的には  $i = 0$  の図形の上の path のみを考えれば良いことが recursion を導出する過程で分かる. これも本研究の成果の一つである.

**定義 6.1** (nearest neighbors から自然に定まる  $W^{i*}$  上の測度).  $i = 0, 1, 2$  とする.

$w \in W^{i*}$  に対して  $W^{i*}$  上の測度  $P^i$  を以下のように定める;

$$P^i(w) := \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))}.$$

**定義 6.2** ( $W_N^i$  及び  $V_N^i$  上の確率測度).  $i = 0, 1, 2, N \in \mathbb{N}$  とする.

$w \in W_N^i, w' \in V_N^i$  に対して  $W_N^i$  及び  $V_N^i$  上の確率測度  $P_N^{i,1}, P_N^{i,2}$  をそれぞれ以下のように定める;

$$P_N^{i,1}(w) := \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} P^i(w),$$

$$P_N^{i,2}(w') := \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} P^i(w').$$

ここで,  $(\frac{1}{2})^{-1} = P^i(W_N^i), (\frac{1}{2})^{-1} (\frac{1}{4})^{-1} = P^i(V_N^i)$  であり,  $P_N^{i,1}, P_N^{i,2}$  は両端固定の path の条件付き確率であることに注意する.

$W_N^i$  と  $V_N^i$  上の確率測度が定まったので, これを用いて  $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  上の確率測度を以下のように定義することができる.

**定義 6.3** ( $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  上の確率測度).  $N \in \mathbb{N}, i = 1, 2, [w] \in W_N^i / \sim_i, [w'] \in V_N^i / \sim_i$  に対して,  $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  上の確率測度  $P_N^{r, \sim_i}, r = 1, 2$  を

$$P_N^{\sim_i, 1}([w]) := \sum_{\substack{v \in W_N^i; \\ v \sim_i w}} P_N^{i, 1}(v),$$

$$P_N^{\sim_i, 2}([w']) := \sum_{\substack{v \in V_N^i; \\ v \sim_i w'}} P_N^{i, 2}(v)$$

と定める.

同値類の定め方より  $w \in W_N^i$  or  $V_N^i$  で, 原点でループを持たないならば  $\#[w] = i + 1$  が成り立つ事と,  $a, b \in [w]$  ならば  $P_N^{i, r}(a) = P_N^{i, r}(b)$  ( $w \in W_N^i$  なら  $r = 1$ ,  $w \in V_N^i$  なら  $r = 2$ ) であることより以下の命題を得る.

**命題 6.4** ( $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  上の確率測度のもう一つの表示法).  $N \in \mathbb{N}, i = 1, 2$  で, 原点でループを持たない  $[w] \in W_N^i / \sim_i, [w'] \in V_N^i / \sim_i$  に対して,

$$P_N^{\sim_i, 1}([w]) = \#[w] P_N^{i, 1}(w) = (i + 1) P_N^{i, 1}(w),$$

$$P_N^{\sim_i, 2}([w']) = \#[w'] P_N^{i, 2}(w') = (i + 1) P_N^{i, 2}(w')$$

が成り立つ.

**注意 6.5.** 命題 6.4 において, 定義 6.3 より, ループを持つ  $[w], [w']$  に対して,

$$P_N^{\sim_i, 1}([w]) = \#[w] P_N^{i, 1}(w),$$

$$P_N^{\sim_i, 2}([w']) = \#[w'] P_N^{i, 2}(w')$$

が成り立つ.

また  $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  の元は  $W_N^0$  及び  $V_N^0$  の元にそれぞれ対応していたが, このことより以下を得る.

**命題 6.6** (同一視  $\eta$  と  $W_N^i / \sim_i$  及び  $V_N^i / \sim_i$  上の確率測度との関係).  $N \in \mathbb{N}, i = 1, 2, w \in W_N^i, w' \in V_N^i$  に対して,

$$P_N^{\sim_i, 1}([w]) = P_N^{0, 1}(\eta(w)),$$

$$P_N^{\sim_i, 2}([w']) = P_N^{0, 2}(\eta(w'))$$

が成り立つ. ( $w, w'$  はループを持ってよいものとする.)



証明. 示し方は同じなので  $P_N^{\sim i,1}$  かつ, 原点でループがない場合についてのみ示す.

$N \in \mathbb{N}, i = 1, 2, w \in W_N^i$  とするとき, 命題 6.6 と,  $j = 2, 3, \dots, l([w]) - 1$  では

$$\frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))} = \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0((\eta w)(j))},$$

また,

$$\frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0((\eta w)(0))} = \frac{1}{2}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} P_N^{\sim i,1}([w]) &= (i+1)P_N^{i,1}(w) \\ &= (i+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} (i+1) \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(0))} \prod_{j=1}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} (i+1) \frac{1}{2(i+1)} \prod_{j=1}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0((\eta w)(j))} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0((\eta w)(j))} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0((\eta w)(j))} \\ &= P_N^{0,1}(\eta(w)). \end{aligned}$$

□

このように確率測度を定義すると,  $W_N^0$  及び  $V_N^0$  上の確率測度  $P_N^{0,1}, P_N^{0,2}$  と粗視化写像の関係性について以下のことが分かる.  $i = 0$  の場合のみを述べるのは, path の同値関係によって  $i = 1, 2$  の場合は  $i = 0$  の場合に帰着できるからである. 準備として定義と補題を少し述べてから, まず粗視化写像との関係性をみていく.

**定義 6.7** (到達時刻の間の path 切片).  $N \in \mathbb{N}, w \in W_N^0 \cup V_N^0, 1 \leq k \leq m_w$  とする.

ただし  $m_w$  を  $T_{0,m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とする.

この時 path の切片  $Z_k^M(w)$  を,

$$Z_k^M(w) := \{w(t) | T_{0,k-1}^M(w) \leq t \leq T_{0,k}^M(w)\}$$

と定義する. また,

$$(Z_k^M)^{-1}(w) = \{w' \in W_N^0 \cup V_N^0 | Z_k^M(w') = Z_k^M(w)\}$$

と定義する.

**補題 6.8** (path の  $Z_k^M(w)$  による分解).  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0 \cup V_{N-M}^0, m_w$  を  $T_{0,m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とすると,

$$\{w \in W_N^0 \cup V_N^0 | 3^{-M} Q_M w = v\} = \bigcap_{k=1}^{m_w} \{w \in W_N^0 \cup V_N^0 | 3^{-M} Q_M \mu_1(Z_k^M(w)) = \mu_1([v(k-1), v(k)])\}$$

である.

**補題 6.9** ( $v$  の一步の確率を細かい path  $w$  であらわす).  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0 \cup V_{N-M}^0$  とするとき,

$$\sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M} Q_M \mu_1(Z_j^M(w)) = \mu_1[v(j-1), v(j)]}} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} = \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))}$$

が成り立つ.

**証明.** まず  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0 \cup V_{N-M}^0$  とするとき,

$\{w \in W_N^0 | 3^{-M} Q_M \mu_1(Z_j^M(w)) = \mu_1[v(j-1), v(j)]\}$  からとった  $w$  を考えると, 左辺の総和記号の中身の記号の部分  $\prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))}$  は,  $\mu_1(Z_j^M(w)) \in W_M^i \cup V_M^i$  を  $P^i$  で測ったものと等しいことに注意する.  $\mu_1(Z_j^M(w)) = w' \in W_M^i \cup V_M^i$  とおくと,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M} Q_M \mu_1(Z_j^M(w)) = \mu_1[v(j-1), v(j)]}} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} &= \sum_{\substack{w' \in W_M^i; \\ w'(l(w')) = a_M^0}} \prod_{j=0}^{l(w')-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w'(j))} \\ &= \frac{1}{i+1} \sum_{\substack{[w'] \in W_M^i / \sim_i; \\ [w'](l([w'])) = [a_M^0]}} \prod_{j=0}^{l([w'])-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^{\sim i}([w'](j))} \\ &= \frac{1}{i+1} \sum_{\substack{w \in W_M^0; \\ w(l(w)) = a_M^0}} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(j))} \\ &= \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\#\mathcal{N}_M^0(w(T_{0,j-1}^M))} = \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))}. \end{aligned}$$

□

**命題 6.10** (coarse graining との関係性).  $N, M \in \mathbb{N}, N > M, v \in W_{N-M}^0, v' \in V_{N-M}^0$  とするとき,

$$\begin{aligned} P_{N-M}^{0,1}(v) &= P_N^{0,1}((3^{-M} Q_M)^{-1}(v)) = P_N^{0,1}(\{w \in W_N^0 | 3^{-M} Q_M w = v\}), \\ P_{N-M}^{0,2}(v') &= P_N^{0,2}((3^{-M} Q_M)^{-1}(v')) = P_N^{0,2}(\{w' \in V_N^0 | 3^{-M} Q_M w' = v'\}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

**証明.** 証明のやり方は変わらないので前半のみを示す.

$N, M \in \mathbb{N}, N > M, v \in W_{N-M}^0$ , ここで  $m_w$  を  $T_{0,m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とすると,  $w \in W_N^0$  を  $3^{-M} Q_M w = v$  を満たすようにとると,

$$v = (w(T_{0,0}^M), \dots, w(T_{0,m_w}^M))$$

となっていることに注意すると,

$$\begin{aligned}
P_N^{0,1}(w \in W_N^0; 3^{-M}Q_M w = v) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M}Q_M w = v}} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(j))} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M}Q_M w = v}} \prod_{j=1}^{m_w} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M}Q_M \mu_1(Z_k^M(w)) = \mu_1[v(k-1), v(k)], \\ k=1, \dots, m_w}} \prod_{j=1}^{m_w} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{\substack{3^{-M}Q_M \mu_1(Z_1^M(w)) \\ = \mu_1[v(0), v(1)]}} \cdots \sum_{\substack{3^{-M}Q_M \mu_1(Z_{m_w}^M(w)) \\ = \mu_1[v(m_w-1), v(m_w)]}} \prod_{j=1}^{m_w} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{m_w} \sum_{\substack{w \in W_N^0; \\ 3^{-M}Q_M \mu_1(Z_j^M(w)) = \mu_1[v(j-1), v(j)]}} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{m_w} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))} \\
&= P_{N-M}^{0,1}(v).
\end{aligned}$$

ただし, 3 つ目の等号は補題 6.8 に依り, 6 つ目の等号は補題 6.9 に依る.  $\square$

次に  $(Z_k^M)^{-1}(w)$  の独立性をみる.

**命題 6.11** ( $(Z_k^M)^{-1}(w)$  の独立性).  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0 \cup V_{N-M}^0, w \in W_N^0 \cup V_N^0, m_w$  を  $T_{i, m_w+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とするとき,  
 $(Z_k^M)^{-1}(w), k = 1, 2, \dots, m_w$  は確率測度  $P_N^{0,r}(\cdot | 3^{-M}Q_M w' = v)$  に関して独立.  
ただし  $v \in W_{N-M}^0$  ならば  $r = 1, v \in V_{N-M}^0$  ならば  $r = 2$  とする.

**証明.** これも示し方は同様であるから,  $r = 1$  の場合のみを示す.

まず,  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0, w \in V_N^0$  ならば,  $\{w\} \cap \{w' \in W_N^0 \cup V_N^0 | 3^{-M}Q_M w' = v\} = \emptyset$  より

$$P_N^{0,1}(w | 3^{-M}Q_M w' = v) = 0.$$

また  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0, w \in V_N^0$  であれば, ある  $k = 1, \dots, m_w$  があって  $(Z_k^M)^{-1}(w) \cap \{w' \in W_N^0 \cup V_N^0 | 3^{-M}Q_M w' = v\} = \emptyset$  となるので

$$\prod_{k=1}^{m_w} P_N^{0,1}((Z_k^M)^{-1}(w) | V_N^0 | 3^{-M}Q_M w' = v) = 0.$$

ゆえに独立性が成り立つ.

一方で  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, v \in W_{N-M}^0, w \in W_N^0$  とすると,

$k = 1, 2, \dots, m_w$  を一つ固定するとき, 命題 6.10 より,

$$P_N^{0,1}(\{w \in W_N^0 | 3^{-M} Q_M w = v\}) = P_{N-M}^{0,1}(v) = \prod_{j=0}^{m_w-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j))}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} P_N^{0,1}((Z_k^M)^{-1}(w) | 3^{-M} Q_M w' = v) &= P_N^{0,1}((Z_k^M)^{-1}(w) \cap \{3^{-M} Q_M w' = v\}) \cdot \left( P_N^{0,1}(3^{-M} Q_M w' = v) \right)^{-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=0}^{(k-1)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j))} \prod_{j=T_{0,k-1}^M}^{T_{0,k}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(j))} \prod_{j=k}^{m_w-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j))}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=0}^{m_w-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j))}} \\ &= \left( \prod_{j=T_{0,k-1}^M}^{T_{0,k}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(j))} \right) \cdot \left( \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(k-1))} \right)^{-1} \\ &= \left( \prod_{j=T_{0,k-1}^M}^{T_{0,k}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(j))} \right) \cdot \left( \frac{1}{\#\mathcal{N}_M^0(w(T_{0,k-1}^M))} \right)^{-1} \quad (\text{a}) \end{aligned}$$

である. したがって,  $\bigcap_{k=1}^{m_w} (Z_k^M)^{-1}(w) = \{w\}$  と,

$v \in W_{N-M}^0, w \in W_N^0$  より  $\{w\} \cap \{w' \in W_N^0 | 3^{-M} Q_M w' = v\} = \{w\}$  に注意すれば,

$$\begin{aligned} P_N^{0,1}((Z_k^M)^{-1}(w), k = 1, \dots, m_w | 3^{-M} Q_M w' = v) &= P_N^{0,1}(w | 3^{-M} Q_M w' = v) \\ &= P_N^{0,1}(\{w\} \cap \{3^{-M} Q_M w' = v\}) \cdot \left( P_N^{0,1}(3^{-M} Q_M w' = v) \right)^{-1} \\ &= P_N^{0,1}(w) \cdot \left( P_N^{0,1}(3^{-M} Q_M w' = v) \right)^{-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{l=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(l))}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{m_w} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))}} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{m_w} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))}}{\prod_{j=1}^{m_w} \frac{1}{\#\mathcal{N}_M^0(w(T_{0,j-1}^M))}} \\ &= \prod_{j=1}^{m_w} \frac{\prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w(k))}}{\frac{1}{\#\mathcal{N}_M^0(w(T_{0,j-1}^M))}} \\ &= \prod_{j=1}^{m_w} P_N^{0,1}((Z_j^M)^{-1}(w) | 3^{-M} Q_M w' = v) \end{aligned}$$

となるので独立. ただし, 7 つめの等号は (a) に依る. □

最後に,  $(Z_k^M)^{-1}(w)$  を条件付きの測度  $P_N^{0,r}(\cdot | 3^{-M} Q_M w' = v)$  で測った値についての主張を述べる.

**定義 6.12** (各点で交わる上向き三角形の個数).  $M, N \in \mathbb{N}, M < N, w \in W_N^i \cup V_N^i$  とするとき,

$$V(w, M, j) := \#\{\Delta \in \mathcal{T}_M^i | w(T_{i,j}^M) \in \Delta\}$$

と定める.

**命題 6.13** (path の切片の条件付き確率による測度).  $M, N \in \mathbb{N}, w' \in W_N^0 \cup V_N^0, v \in W_{N-M}^0 \cup V_{N-M}^0, m_{w'}$  を  $T_{0, m_{w'}+1}^M(w) = \infty$  を満たす最小の自然数とし,  $j = 1, 2, \dots, m_{w'}$  とするとき,

$$P_N^{0,r}((Z_j^M)^{-1}(w')|3^{-M}Q_M w'' = v) = 2V(w', M, j-1)P^i(\mu_1(Z_j^M(w')))$$

が成り立つ. ただし,  $v \in W_{N-M}^i$  なら  $r = 1$ ,  $v \in V_{N-M}^i$  なら  $r = 2$  である.

**証明.** 同様の方法で示せるので, これも  $r = 1$  の場合のみを示す.

$v \in W_{N-M}^i$  のとき,  $(Z_j^M)^{-1}(w') \cap \{w'' \in W_N^0 \cup V_N^0 | 3^{-M}Q_M w'' = v\} \subset W_N^0$  なので  $r = 1$  である.

またこの時,

$$\frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))} = \frac{1}{2V(w', M, j-1)}$$

および, ある  $i = 0, 1, 2$  があって,

$$\begin{aligned} P_N^{0,1}((Z_j^M)^{-1}(w')|3^{-M}Q_M w'' = v) &= P_N^{0,1}((Z_j^M)^{-1}(w') \cap \{3^{-M}Q_M w'' = v\}) \cdot (P_N^{0,1}(3^{-M}Q_M w'' = v))^{-1} \\ &= \left( \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w'(k))} \right) \cdot \left( \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(v(j-1))} \right)^{-1} \\ &= V(w', M, j-1) \left( \frac{1}{2} \right)^{-1} \prod_{k=T_{0,j-1}^M}^{T_{0,j}^M-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^0(w'(k))} \\ &= 2V(w', M, j-1)P^i(\mu_1(Z_j^M(w'))). \end{aligned}$$

□

これで確率測度の再帰性の証明に使う主な命題は出そろったので, 以下ではループ消し作用素  $L$  を使った確率測度を定め, その再帰性について述べる.

**定義 6.14** ( $L$  の像測度).  $N \in \mathbb{N}$  として,  $\hat{W}_N^0 \cup \hat{V}_N^0$  上の確率測度を, ループのない path  $w \in \hat{W}_N^0 \cup \hat{V}_N^0$  に対して

$$\begin{aligned} \hat{P}_N^{0,1}(w) &= P_N^{0,1}(w' \in W_N^0; Lw' = w), \\ \hat{P}_N^{0,2}(w) &= P_N^{0,2}(w' \in V_N^0; Lw' = w) \end{aligned}$$

と定める.

この定義の下, ここで定めた像測度の再帰性を論じるために補題を一つ示す.

**定義 6.15** (ループ消しと粗視化写像の合成).  $N \in \mathbb{N}$  とし,  $w \in W_{N+1}^0 \cup V_{N+1}^0$  とするとき,  $\hat{Q}_1 w$  で  $w$  から  $3^1$ -スケール以上のループを取り除いた path とする.

**補題 6.16** ( $3^{-1}\hat{Q}_1$  の移る先を固定したときの逆像の測度).  $N \in \mathbb{N}, u \in \hat{W}_N^0$  に対して

$$P_{N+1}^{0,1}(v \in W_{N+1}^0; 3^{-1}\hat{Q}_1 v = u) = \hat{P}_N^{0,1}(u),$$

$N \in \mathbb{N}, u \in \hat{V}_N^0$  に対して

$$P_{N+1}^{0,2}(v \in V_{N+1}^0; 3^{-1}\hat{Q}_1 v = u) = \hat{P}_N^{0,2}(u)$$

が成り立つ.

証明. 証明の方法は同じなので, 前半のみを示す.  $N \in \mathbb{N}, u \in \hat{W}_N^0$  とするとき,  $\hat{Q}_1$  の定義から  $\hat{Q}_1 = LQ_1$  に注意すると,

$$\begin{aligned}
P_{N+1}^{0,1}(v \in W_{N+1}^0; 3^{-1}\hat{Q}_1 v = u) &= P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}LQ_1 v = u) \\
&= P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1 v \in L^{-1}(u) \cap W_N^0) \\
&= \sum_{u' \in L^{-1}(u) \cap W_N^0} P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1 v = u') \\
&= \sum_{u' \in L^{-1}(u) \cap W_N^0} P_N^{0,1}(u') \\
&= P_N^{0,1}(L^{-1}(u) \cap W_N^0) \\
&= P_N^{0,1}(w \in W_N^0; Lw = u) \\
&= \hat{P}_N^{0,1}(u).
\end{aligned}$$

ただし, 4 つめの等号は命題 6.10 に依る. □

これで準備が整ったので確率測度の再帰性を示していく.

**命題 6.17** (確率測度  $\hat{P}_N^{0,r}$  の再帰性).  $N \in \mathbb{N}, w \in \hat{W}_{N+1}^0, \sigma_1^0(w) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}, w_j = w|_{\Delta_j} (j = 1, \dots, k)$  とする.

この時,

$$\hat{P}_{N+1}^{0,1}(w) = \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u) = 3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \hat{P}_N^{0,1}(u),$$

$w \in \hat{V}_{N+1}^0$  の時は,

$$\hat{P}_{N+1}^{0,2}(w) = \sum_{\substack{u \in \hat{V}_N^0; \\ \sigma_0^0(u) = 3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \hat{P}_N^{0,2}(u)$$

が成り立つ. ただし,  $r(j)$  は  $\Delta_j$  のタイプとする.

証明. 証明の方法は変わらないので前半のみを示す.

$N \in \mathbb{N}, w \in \hat{W}_{N+1}^0, \sigma_1^0(w) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}, w_j = w|_{\Delta_j} (j = 1, \dots, k)$  とする. このとき

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{N+1}^{0,1}(w) &= P_{N+1}^{0,1}(v \in W_{N+1}^0; Lv = w) \\
&= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u) = 3^{-1}\sigma_1^0(w)}} P_{N+1}^{0,1}(\{Lv = w\} \cap \{3^{-1}\hat{Q}_1 v = u\}).
\end{aligned} \tag{1}$$

したがって,

$$\{v; 3^{-1}\hat{Q}_1 v = u\} = \bigcup_{u' \in L^{-1}(u)} \{v; 3^{-1}Q_1 v = u'\}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_u P_{N+1}^{0,1}(\{Lv = w\} \cap (\bigcup_{u' \in L^{-1}(u)} \{3^{-1}Q_1v = u'\})) \\
&= \sum_u P_{N+1}^{0,1}(\bigcup_{u' \in L^{-1}(u)} (\{Lv = w\} \cap \{3^{-1}Q_1v = u'\})) \\
&= \sum_u \sum_{u' \in L^{-1}(u)} P_{N+1}^{0,1}(\{Lv = w\} \cap \{3^{-1}Q_1v = u'\}) \\
&= \sum_u \sum_{u'} P_{N+1}^{0,1}(v; Lv = w | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_u \sum_{u'} P_{N+1}^{0,1}(v; v \in L^{-1}(w) | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \tag{2}
\end{aligned}$$

となる.

ここで注意として,  $v \in L^{-1}(w)$  というのは,  $u' \in L^{-1}(u)$  を固定し,  $3^{-1}Q_1v = u'$  という  $3^1$ -スケール以上のループの付き方が固定されている条件の下で,  $w$  につくループを考えている. したがって  $w$  につくループは  $3^0$ -スケールのループであり,  $v \in L^{-1}(w)$  という条件は,  $v \in L_0^{-1}(w)$  という条件に置き換わる.

したがって式 (2) は

$$\sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u) = 3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \sum_{u' \in L^{-1}(u)} P_{N+1}^{0,1}(v \in W_{N+1}^0; v = L_0^{-1}(w) | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \tag{3}$$

と書き直すことができる. したがって,

$$\begin{aligned}
(3) &= \sum_u \sum_{u'} P_{N+1}^{0,1}(v \in W_{N+1}^0; L_0v = w | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_u \sum_{u'} P_{N+1}^{0,1}(v; (L_0v)|_{\Delta_j} = w_j, j = 1, \dots, k | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_u \sum_{u'} \prod_{j=1}^k P_{N+1}^{0,1}(v; (L_0v)|_{\Delta_j} = w_j | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_u \sum_{u'} \prod_{j=1}^k P_{N+1}^{0,1}(v; v|_{\Delta_j} \in L_0^{-1}(w_j) | 3^{-1}Q_1v = u') P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \tag{4}
\end{aligned}$$

である. ただし 3 つめ等号は命題 6.11 に依る. ここで  $\{O \rightarrow a_M^0\}$  で  $F'_M$  上の  $O$  出発の path で  $b_M^0$  を通らずに  $a_M^0$  に至り, そこで停止するもの全体の集合とする.  $\{O \rightarrow b_M^0\}$  等も同様に定義されるものとする.

$\Delta_j$  がタイプ 1 のとき,  $T_{0,j-1}^{ex,1}(w) = T_{0,n}^1(w)$  なる  $n \in \mathbb{N}$  をとれば, ある  $i = 0, 1, 2$  が存在して,

$$\begin{aligned}
P_{N+1}^{0,1}(v; v|_{\Delta_j} \in L_0^{-1}(w_j)|3^{-1}Q_1v = u') &= 2V(w, 1, n) \sum_{v' \in L_0^{-1}(w_j)} P^i(v') \\
&= 2V(w, 1, n) \sum_{\substack{w' \in \{O \rightarrow a_1^0\} \\ \cap L_0^{-1}(In(w_j))}} \sum_{In(v')=w'} P^i(v') \\
&= 2V(w, 1, n) \sum_{\substack{w' \in W_1^0 \\ \cap L_0^{-1}(\eta \circ \mu_1(w_j))}} \sum_{\substack{\eta \circ \mu_1(v')=w' \\ \mu_1(v') \in \{O \rightarrow a_1^0\}}} P^i(v') \\
&= 2V(w, 1, n) \sum_{w' \in L_0^{-1}(\eta \circ \mu_1(w_j))} \frac{1}{V(w, 1, n)} \# [v'] P^i(v') \\
&= 2 \sum_{w' \in L_0^{-1}(\eta \circ \mu_1(w_j))} \# [v'] P^i(v') \\
&= 2 \sum_{w' \in L_0^{-1}(\eta \circ \mu_1(w_j))} P^0(w') \\
&= P_1^{0,1}(L_0^{-1}(\eta \circ \mu_1(w_j))) \\
&= \hat{P}_1^{0,1}(\eta \circ \mu_1(w_j))
\end{aligned}$$

である.  $\Delta_j$  がタイプ 2 の時は, 任意の  $v \in W_{N+1}^0 \cup V_{N+1}^0$  に対して,  $T_{0,j-1}^{ex,1}(w) = T_{0,n}^1(w)$  なる  $n \in \mathbb{N}$  をとれば,  $i = V(w, 1, n) - 1, i' = V(w, 1, n + 1) - 1$  とするとき, 定義 5.8 において,  $w_j$  から作られた  $w_1^j, w_2^j$  と同様に,  $v_j := v|_{\Delta_j}$  に対しても  $v_1^j, v_2^j$  を定義することによって,

$$P^i(v_j) = P^i(v_1^j)P^{i'}(v_2^j)$$

が成り立つことに注意する. すると,  $F_1'$  上の path  $w'$  に対しても, 定義 5.8 の (1) と同様にして  $w_1', w_2'$  を定義するものとする,

$$\begin{aligned}
P_{N+1}^{0,1}(v; v|_{\Delta_j} \in L_0^{-1}(w_j)|3^{-1}Q_1v = u') &= \sum_{v_j \in L_0^{-1}(w_j)} P_{N+1}^{0,1}(v|3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(w_j))} \sum_{In(v_j)=w'} P_{N+1}^{0,1}(v|3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(w_j))} \left\{ 2V(w, 1, n) \sum_{\substack{\eta \circ \mu_1(v_1^j)=w_1' \\ \mu_1(v_1^j) \in \{O \rightarrow b_1^0\}}} P^i(v_1^j) \times 2V(w, 1, n + 1) \sum_{\substack{\eta \circ \mu_2(v_2^j)=w_2' \\ \mu_2(v_2^j) \in \{O \rightarrow a_1^1\}}} P^{i'}(v_2^j) \right\} \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(w_j))} 2P^0(w_1')2P^0(w_2') \tag{5}
\end{aligned}$$



$In(w_j) = In(\hat{w})$  なるループのない path 切片  $\hat{w}$  で,  $\mu_1(\hat{w}) \in V_1^0$  なるものをとると,

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1^{0,2}(\hat{w}) &= \sum_{w' \in L_0^{-1}(\hat{w})} 2 \cdot 4P^0(w') \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(\hat{w}))} \sum_{In(w'')=w'} 2 \cdot 4P^0(w'') \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(\hat{w}))} 2P^0(w'_1) \sum_{\substack{\eta \circ \mu_2(w'_2)=w'_2 \\ \mu_2(w'_2) \in \{O \rightarrow a_1^1\}}} 2 \cdot 2P^1(w'_2) \\
&= \sum_{w' \in L_0^{-1}(In(\hat{w}))} 2P^0(w'_1) 2P^0(w'_2)
\end{aligned}$$

を得る. したがって, この  $\hat{w}$  を  $w_j$  とおきなおすことにより,

$$(5) = \hat{P}_1^{0,2}(\eta \circ \mu_1(w_j))$$

である. 以上のことから,

$$\begin{aligned}
(4) &= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u)=3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \sum_{u' \in L^{-1}(u)} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u)=3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \sum_{u' \in L^{-1}(u)} P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v = u') \\
&= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u)=3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}Q_1v \in L^{-1}(u)) \\
&= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u)=3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) P_{N+1}^{0,1}(v; 3^{-1}\hat{Q}_1v = u) \\
&= \sum_{\substack{u \in \hat{W}_N^0; \\ \sigma_0^0(u)=3^{-1}\sigma_1^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_1^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \hat{P}_N^{0,1}(u)
\end{aligned}$$

であるから, 命題の主張が成り立つ. ただし 5 つめの等号は補題 6.16 に依る.  $\square$

これで確率測度の再帰性が分かったので, 次はそれに関するスケールされた脱出時刻のラプラス変換の挙動について論じてゆくが, そのためにまずはくりこみ群と呼ばれる確率母関数を定義し, その変数部分に指数関数を代入することで, ラプラス変換とくりこみ群が対応していることを見る. そのことを用いて, スケールされた脱出時刻のラプラス変換の挙動をくりこみ群の性質を使って調べていく.

**定義 6.18** (くりこみ群).  $N \in \mathbb{N}, w \in \hat{W}_N^0 \cup \hat{V}_N^0, r = 1, 2$  とし,  $s_1(w), s_2(w)$  をそれぞれ  $\sigma_0^0(w)$  の中のタイプ 1 の個数, タイプ 2 の個数とする. ただし  $T_{0,1}^{ex,N}(w) = l(w) = s_1(w) + 2s_2(w)$  であることに注意する. このとき,

$$\Phi_N^r(x, y) := \sum_{w \in \hat{W}_N^0 \cup \hat{V}_N^0} \hat{P}_N^{0,r}(w) x^{s_1(w)} y^{s_2(w)}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

と定義する.

このように定義すれば定理 6.17 より以下のことが直ちに分かる.

**命題 6.19** (くりこみ群の recursion).  $M, N \in \mathbb{N} (M < N), r = 1, 2$  とするとき,

$$\Phi_{N+1}^r(x, y) = \Phi_N^r(\Phi_1^1(x, y), \Phi_1^2(x, y)),$$

とくに,

$$\Phi_{N+M}^r(x, y) = \Phi_N^r(\Phi_M^1(x, y), \Phi_M^2(x, y))$$

が成り立つ.

このことからくりこみ群は  $N = 1$  の場合さえ分かれば後は自動的に任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対して求められると分かる.  $N = 1$  の場合のくりこみ群の具体的な形は計算機を用いることによって以下の形になると分かる. また, それを求めるアルゴリズムについては後述とする.

**命題 6.20** (くりこみ群の具体的な表示).

$$\begin{aligned} \Phi_1^1(x, y) = & \frac{y^4}{3780} + \frac{x^2 y^3}{1890} + \frac{8x y^3}{945} + \frac{y^3}{252} + \frac{2x^4 y^2}{945} + \frac{11x^3 y^2}{1890} + \frac{41x^2 y^2}{630} \\ & + \frac{16x y^2}{315} + \frac{8x^5 y}{945} + \frac{19x^4 y}{945} + \frac{176x^3 y}{945} + \frac{251x^2 y}{1260} + \frac{8x^6}{945} + \frac{4x^5}{189} + \frac{673x^4}{3780} + \frac{76x^3}{315}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^2(x, y) = & \frac{x y^4}{882} + \frac{4y^4}{6615} + \frac{2x^3 y^3}{441} + \frac{181x^2 y^3}{13230} + \frac{211x y^3}{13230} + \frac{y^3}{294} + \frac{152x^4 y^2}{6615} + \frac{373x^3 y^2}{6615} + \frac{431x^2 y^2}{4410} \\ & + \frac{167x y^2}{4410} + \frac{248x^5 y}{6615} + \frac{604x^4 y}{6615} + \frac{2797x^3 y}{13230} + \frac{254x^2 y}{2205} + \frac{128x^6}{6615} + \frac{64x^5}{1323} + \frac{1919x^4}{13230} + \frac{19x^3}{245}. \end{aligned}$$

この表示よりくりこみ群のゼロでない成分が実の固定点, すなわち  $a \in \mathbb{R}^2$  で

$$\Phi_N^r(a) = a \quad (r = 1, 2),$$

つまり

$$\Phi_1^r(a) = a \quad (r = 1, 2)$$

を満たす点を計算すると  $a = (1, 1)$  と分かる. また, 以下で行うラプラス変換の評価のために平均行列というもの定義しておく.

**定義 6.21** (平均行列).

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_1^1(1, 1) & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1^1(1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_1^2(1, 1) & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1^2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{9} & \frac{221}{315} \\ \frac{1385}{441} & \frac{2216}{2205} \end{bmatrix}.$$

$M$  の正の最大固有値を  $\lambda$  とおくと  $\lambda = \frac{2\sqrt{417414}+1431}{735} = 3.70496829\dots$  である.

この結果は [4] の *Uniform spanning tree* を用いて得られた結果と一致する.

また  $\nu = \frac{\log 3}{\log \lambda} < 1$  と定義しておく.

## 7 スケールされた脱出時刻のラプラス変換のふるまい

これらの準備の下，スケールされた脱出時刻のラプラス変換がある確率変数のラプラス変換に収束することと，そのことから脱出時刻がある確率変数に  $N \rightarrow \infty$  で法則収束することを示すことができる．証明は本質的な議論に用いる補題が多数あるので補遺にまわす．

**定義 7.1** (スケールされた脱出時刻のラプラス変換).  $t \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}, r = 1, 2$  とするとき

$$G_N^r(t) := \hat{E}_N^r[\exp(-t\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N})]$$

と定める．ただし  $\hat{E}_N^r$  は  $\hat{P}_N^{0,r}$  に関する期待値である．

**命題 7.2** (ラプラス変換の収束と脱出時刻の法則収束).  $N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{C}, r = 1, 2$  とするとき以下が成り立つ．

(1)  $G_N^r(t)$  をくりこみ群を使って表示することができて，

$$G_N^r(t) = \Phi_N^r(e^{-\lambda^{-N}t}, e^{-\lambda^{-N}2t})$$

となる．

(2)  $G_N^r(t)$  は  $t \in \mathbb{C}$  である正則関数  $g_r(r)$  に広義一様収束する．

また  $g_r(t)$  は以下を満たす；

$$g_r(\lambda t) = \Phi_1^r(g_1(t), g_2(t)), \quad g_r(0) = 1.$$

(3)  $g_r$  は  $\mathbb{R}_+$  に台を持つあるボレル確率測度  $P^{*r}$  のラプラス変換である．

また  $P^{*r}$  の積分に関して確率変数列  $\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}$  はある確率変数  $T^{*r}$  に法則収束する．

また命題 7.2 とくりこみ群の具体的な表示から以下のようなラプラス変換の評価を得ることができる．

**命題 7.3** (ラプラス変換の評価). 正の定数  $C_1, C_2, t_0$  があって任意の  $t > t_0$  と  $N > \log_\lambda(t/t_0)$  に対して，

$$\exp(-C_2 t^\nu) \leq G_N^r(t) \leq \exp(-C_1 t^\nu), \quad r = 1, 2 \quad (7.3)$$

が成り立つ．

**証明.**  $r = 1, 2$  に対して， $\Phi_1^r$  の明示的な表示があるので， $\Phi_1^r, r = 1, 2$  の係数の中で最小のものを  $q_1 < 1$  とおくと， $0 < x, y < 1$  に対して，

$$q_1(x \wedge y)^3 \leq \Phi_1^r(x, y) \leq (x \vee y)^3, \quad r = 1, 2$$

が成り立つ．したがって，

$$(q_1(x \wedge y))^{3^M} \leq \Phi_M^r(x, y) \leq (x \vee y)^{3^M}, \quad r = 1, 2$$

である．このことと，

$$G_{N+M}^r(t) = \Phi_M^r(G_N^1(t/\lambda^M), G_N^2(t/\lambda^M)), \quad r = 1, 2$$

を用いると,

$$\{q_1(G_N^1(t/\lambda^M) \wedge G_N^2(t/\lambda^M))\}^{3^M} \leq G_{N+M}^r(t) \leq \{G_N^1(t/\lambda^M) \vee G_N^2(t/\lambda^M)\}^{3^M}, \quad r = 1, 2$$

が成り立つ.  $t_0 > 0$  を固定すると, 数列  $\{G_N^1(t_0) \vee G_N^2(t_0)\}_{N=1}^\infty, \{G_N^1(\lambda t_0) \wedge G_N^2(\lambda t_0)\}_{N=1}^\infty$  はラプラス変換のある点での値の列であることと, 命題 7.2(2) から, ある正の定数  $c_1, c_2 \in (0, 1)$  が存在して, 任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\begin{aligned} q_1(G_N^1(\lambda t_0) \wedge G_N^2(\lambda t_0)) &> c_1, \\ G_N^1(t_0) \vee G_N^2(t_0) &< c_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって任意の  $t > t_0$  を定め, それに対応する  $M \in \mathbb{N}$  を  $\lambda^M \leq \frac{t}{t_0} < \lambda^{M+1}$  を満たすようにとれば,  $0 < \frac{t}{\lambda^M} < t_0 \lambda$  かつ  $0 < t_0 \leq \frac{t}{\lambda^M}$  であるから,  $G_N^r(t)$  はラプラス変換なので  $t$  に関して単調減少であることを用いれば,

$$\begin{aligned} c_1^{3^M} &< \{q_1(G_N^1(\lambda t_0) \wedge G_N^2(\lambda t_0))\}^{3^M} \\ &< \{q_1(G_N^1(t/\lambda^M) \wedge G_N^2(t/\lambda^M))\}^{3^M} \leq G_{N+M}^r(t) \end{aligned}$$

である. 同様にして  $G_{N+M}^r(t)$  の上からの評価も得ることができ,

$$c_1^{3^M} < G_{N+M}^r(t) < c_2^{3^M}, \quad r = 1, 2$$

を得る. したがって,

$$\begin{aligned} c_1^{3^M} &< G_{1+M}^r(t) < c_2^{3^M} & (N = 1 \text{ とした}) \\ c_1^{3^{N-1}} &< G_N^r(t) < c_2^{3^{N-1}}, \quad r = 1, 2 & (M + 1 = N \text{ とおきなおした}) \end{aligned}$$

が成り立つ.  $0 < c_1, c_2 < 1$  より  $\log c_1, \log c_2 < 0$  であることに注意すれば,

$$c_1^{3^{N-1}} > c_1^{\frac{1}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^\nu} = e^{\frac{\log c_1}{3t_0^\nu} t^\nu}$$

及び,

$$c_2^{3^{N-1}} = c_2^{(\lambda^\nu)^{N-1}} \leq c_2^{\left(\frac{t}{t_0}\right)^\nu} = e^{\frac{\log c_2}{t_0^\nu} t^\nu}$$

であるから,  $C_1 = -\frac{\log c_2}{t_0^\nu}, C_2 = -\frac{\log c_1}{3t_0^\nu}$  としてラプラス変換の評価が成り立つ. □

また指数型のタウバー型定理から以下のような命題が成り立つ.

**命題 7.4** (確率測度の評価). ラプラス変換  $G_N^r(t)$  が式 (7.3) を満たすとき以下が成り立つ;

(1) 正の定数  $C_3$  と  $C_4$  が存在して, 任意の  $\lim_{N \rightarrow \infty} 3^{N(1-\nu)/\nu} \alpha_N = \infty$  かつ  $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = 0$  を満たす正の数列  $\{\alpha_N\}_N$  に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} -C_3 &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \alpha_N^{\nu/(1-\nu)} \log \hat{P}_N^{0,r}(\lambda^{-N} T_{0,1}^{ex,N}(w)) \leq \alpha_N \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \alpha_N^{\nu/(1-\nu)} \log \hat{P}_N^{0,r}(\lambda^{-N} T_{0,1}^{ex,N}(w)) \leq \alpha_N \leq -C_4, \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

(2) 正の定数  $C_5$ ,  $C_6$  及び  $C_7$  が存在して, 任意の  $(3^{\frac{1}{\nu}-1})^N \xi \geq C_5$  を満たす  $\xi > 0$  と  $N \in \mathbb{N}$  に対して

$$\hat{P}_N^{0,r}(\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(w) \leq \xi) \leq C_6 e^{-C_7 \xi^{-\nu/(1-\nu)}}, \quad r = 1, 2$$

が成り立つ.

証明. まずは (1) を示す.

命題 7.4 の (1) の仮定を満たす  $\{\alpha_N\}$  を一つとり,  $r = 1$  に対して,

$$\mu_N([0, x]) := \hat{P}_N^{0,r}(\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(w) \leq \alpha_N x)$$

と定義し, また  $\beta_N = \alpha_N^{-\nu/(1-\nu)}$  と定義すると仮定より  $\{\beta_N\}$  は発散する正の数値である. このとき  $G_N^1(t)$  の定義から,

$$\int_0^\infty e^{-\beta_N s \xi} \mu_N(d\xi) = G_N^1\left(\frac{\beta_N s}{\alpha_N}\right)$$

であるから命題 7.3 より十分大きい  $N$  に対して,

$$\exp\left(-C_2\left(\frac{\beta_N s}{\alpha_N}\right)^\nu\right) \leq \int_0^\infty e^{-\beta_N s \xi} \mu_N(d\xi) \leq \exp\left(-C_1\left(\frac{\beta_N s}{\alpha_N}\right)^\nu\right)$$

を得る. したがって,

$$-C_2 s^\nu \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_N} \log \int_0^\infty e^{-\beta_N s \xi} \mu_N(d\xi) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_N} \log \int_0^\infty e^{-\beta_N s \xi} \mu_N(d\xi) \leq -C_1 s^\nu$$

である.  $f_1(s) = C_1 s^\nu$ ,  $f_2(s) = C_2 s^\nu$  とすると  $\nu < 1$  より  $f_1, f_2$  は凸関数でルジャンドル変換  $f_1^*, f_2^*$  は  $s > 0$  に対してそれぞれ

$$\begin{aligned} f_r^*(s) &= \inf_{x>0} (xs - f_r(x)) = x_r(s)s - f_r(x_r(s)) \\ &= -(C_r(1-\nu)^{1-\nu} \nu^\nu)^{1/(1-\nu)} s^{-\nu/(1-\nu)}, \quad r = 1, 2 \end{aligned}$$

となる. ただし  $x_r(s)$  は  $f'_r(x_r(s)) = s$  を満たす.

更に

$$\begin{aligned} s^*(\xi) &= \sup\{s > 0 \mid s\xi - f_2(s) \leq f_1^*(\xi)\}, \\ \xi_*(s) &= \inf\{\xi > 0 \mid s\xi - f_1^*(\xi) \leq f_2(s)\} \end{aligned}$$

と定めれば,  $\xi_*(s^*(x))$  は [2, p.249, 図 A.4] 及び [2, p.250, 図 A.5] から計算することができ, ある  $C_1, C_2, \nu$  のみに依存する定数  $B$  があって,  $\xi_*(s^*(x)) = Bx$  となるから [2, p.248, 定理 A.10(指数型のタウバー型定理)] から, ある正定数  $C_3, C_4$  があって

$$\begin{aligned} -C_3 x^{-\nu/(1-\nu)} &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_N} \log \mu_N([0, x]) \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_N} \log \mu_N([0, x]) \leq -C_4 x^{-\nu/(1-\nu)}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.  $x = 1$  とすれば, 命題 7.4 の (1) の  $r = 1$  での主張が成り立つ.  $r = 2$  の場合も同様に示せばよい.

次に (2) を示す.

$$\hat{P}_N^r := \hat{P}_N^{0,r} \circ (\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N})^{-1}$$

とすると、 $t > 0$  に対して、 $e^{-t\xi}$  の単調性より

$$e^{-t\xi} \hat{P}_N^r([0, \xi]) \leq \int_0^\infty e^{-t\xi} \hat{P}_N^r(d\xi) = G_N^r(t)$$

となるので、ある  $t_0 > 0$  があって任意の  $t > t_0$  と  $N > \log_\lambda(t/t_0)$  に対して、

$$\begin{aligned} \hat{P}_N^r([0, \xi]) &\leq e^{t\xi} G_N^r(t) \\ &\leq e^{t\xi} e^{-C_1 t^\nu} = e^{-C_1 t^\nu + \xi t} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし 2 つめの不等号は命題 7.3 に依る。

$e^{-C_1 t^\nu + \xi t}$  は  $t = \left(\frac{C_1 \nu}{\xi}\right)^{1/(1-\nu)} =: s_*$  で最小値をとるが、もし  $(3^{\frac{1}{\nu}-1})^N \xi \geq \frac{C_1 \nu}{t_0^{1-\nu}}$  ならば  $N > \log_\lambda(s_*/t_0)$  となるので、

$$s_* \xi - C_1 s_*^\nu = C_1^{1/(1-\nu)} \xi^{-\nu/(1-\nu)} (\nu^{1/(1-\nu)} - \nu^{\nu/(1-\nu)}) < 0$$

に注意すれば、 $C_5 = \frac{C_1 \nu}{t_0^{1-\nu}}, C_6 = 1, C_7 = C_1^{1/(1-\nu)} (\nu^{1/(1-\nu)} - \nu^{\nu/(1-\nu)})$  として (2) が成り立つ。  $\square$

## 8 コルモゴロフの拡張定理による loop-erased random walk の構成

このようにして示した確率測度の評価は後で変位の指数と重複対数の法則の証明に使う。以下では変位の指数と重複対数の法則の主役となる pre-3 gasket 上の loop-erased random walk の存在をコルモゴロフの拡張定理を経由して示していく。

そのためにまず、今まで対象としてきた path だけでなくより広いクラスの path まで考慮して、その上で一定の関係を満たす path の有限個の組の集合上の確率測度を定義して、それに対してコルモゴロフの拡張定理を適用するという流れで議論を進めていく。ここでいう一定の関係を満たす path の組というのは、後で詳しく定義するが、直感的に言えば組の成分を表すパラメータに応じて path が伸びていくような組である。以下ではまず考える path のクラスを広げることを考える。

**定義 8.1** (反転した path). 定義 3.5 では特徴付け与えなかった path の特徴づけを以下のように与える；

$$W_N^{0,b} := \{w \in W^{0*} | w(l(w)) = b_N^0, l(w) = T_{0,1}^N\},$$

$$V_N^{0,b} := \{w \in W^{0*} | w(l(w)) = b_N^0, w(T_{0,1}^N) = a_N^0, l(w) = T_{0,2}^N\},$$

$$W_N^{1,b} := \{w \in W^{1*} | w(l(w)) = b_N^0 \text{ または } w(l(w)) = b_N^1 \text{ } (l(w) = T_{1,1}^N)\},$$

$$V_N^{1,b} := \{w \in W^{1*} | w(l(w)) = b_N^0, w(T_{1,1}^N) = a_N^0 \text{ または } w(l(w)) = b_N^1, w(T_{1,1}^N) = a_N^1 \text{ } (l(w) = T_{1,2}^N)\},$$

$$W_N^{2,b} := \{w \in W^{2*} | w(l(w)) = b_N^0 \text{ または } w(l(w)) = b_N^1 \text{ または } w(l(w)) = b_N^2 \text{ } (l(w) = T_{2,1}^N)\},$$

$$V_N^{2,b} := \{w \in W^{2*} | w(l(w)) = b_N^0, w(T_{2,1}^N) = a_N^0 \text{ または } w(l(w)) = b_N^1, w(T_{2,1}^N) = a_N^1$$

$$\text{または } w(l(w)) = b_N^2, w(T_{2,1}^N) = a_N^2 \text{ } (l(w) = T_{2,2}^N)\}.$$

$W_N^{i,b}$  及び  $V_N^{i,b}$  上の確率測度も、 $W_N^i$  及び  $V_N^i$  上の確率測度、すなわち定義 6.2 のように定義できる。また以下では記号の都合上、定義 6.2 で定義された  $W_N^i$  及び  $V_N^i$  上の確率測度  $P_N^{i,1}, P_N^{i,2}$  を、それぞれ  $P_N^{i,1} = P_N^{i,(1)}, P_N^{i,2} = P_N^{i,(3)}$  と表すとする。

**定義 8.2** ( $W_N^{i,b}$  及び  $V_N^{i,b}$  上の確率測度).  $i = 0, 1, 2, N \in \mathbb{N}$  とする。

$w \in W_N^{i,b}, w' \in V_N^{i,b}$  に対して  $W_N^{i,b}$  及び  $V_N^{i,b}$  上の確率測度  $P_N^{i,(2)}, P_N^{i,(4)}$  をそれぞれ以下のように定める；

$$P_N^{i,(2)}(w) := \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))},$$

$$P_N^{i,(4)}(w') := \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \prod_{j=0}^{l(w)-1} \frac{1}{\#\mathcal{N}_0^i(w(j))}.$$

このようにして今まで考えていた path たちの空間とは異なった path 空間  $W_N^{i,b}$  及び  $V_N^{i,b}$  を定義することができた。

考える path クラスの広がった path 空間  $U_N^0 = W_N^0 \cup V_N^0 \cup W_N^{0,b} \cup V_N^{0,b}$  に対して、以上で定義した確率測度を用いて  $U_N^0$  上の確率測度  $P_N^{rw}$  を以下のように定義する。

**定義 8.3** (拡張された path 空間の確率測度).  $w \in U_N^0$  とするとき  $U_N^0$  上の確率測度  $P_N^{rw}$  を以下のように定める；

$$P_N^{rw}(w) := \frac{491}{1248}(P_N^{0,(1)}(w) + P_N^{0,(2)}(w)) + \frac{133}{1248}(P_N^{0,(3)}(w) + P_N^{0,(4)}(w)).$$

以上のようにして今まで対象としてきた、ある意味で path の広がる方向が制限された path 空間  $W_N^0 \cup V_N^0$  を、 $F_0^0$  全体に広がるランダムウォークを考える元となる  $U_N^0$  まで拡張できた。

以下ではループ消し  $L$  を拡張して、確率測度  $P_N^{rw}$  に関する  $L$  の像測度を考えそれがコルモゴロフの拡張定理の仮定、つまり整合条件と呼ばれる条件を満たすことを見ていく。

まずはループ消しを拡張するところから始めなければならないが、 $W_N^{0,b} \cup V_N^{0,b}$  は  $W_N^0 \cup V_N^0$  の path たちを直線  $y = \sqrt{3}x$  を軸に反転させただけであるので、現状で定義されている  $W_N^0 \cup V_N^0$  上のループ消し  $L$  の構成と同じ方法をたどれば  $W_N^{0,b} \cup V_N^{0,b}$  の上でも問題なく類似物が定義できる。したがって、 $U_N^0 = W_N^0 \cup V_N^0 \cup W_N^{0,b} \cup V_N^{0,b}$  上の拡張されたループ消しを改めて  $L$  と書くことにする。また、 $U_N^0$  のループがない path の集合を  $\Gamma_N^0$  とおく。以上のような準備の下、 $L$  の  $P_N^{rw}$  に関する像測度を以下のように定義する。

**定義 8.4** ( $L$  の  $P_N^{rw}$  に関する像測度).  $w \in \Gamma_N^0$  に対して、確率測度  $\tilde{P}_N$  を以下のように定める。

$$\tilde{P}_N(w) := P_N^{rw} \circ L^{-1}(w) = P_N^{rw}(v \in U_N^0; Lv = w).$$

以下では、定義した  $\tilde{P}_N$  を使って、ある一定の関係を保った path の組の集合の上に確率測度を定め、その上に確率測度を定め、それにコルモゴロフの拡張定理を適用し無限長さの path に対する確率測度を定める。(すなわち、無限長さのループのない path がループ消しに関する確率測度を一意的に拡張したもので可測になる)

**定義 8.5** (path の組の空間). path の組の空間を以下のように定義する；

$$\Omega := \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) | \omega_0 \in \Gamma_0^0, \omega \in \Gamma_N^0, \omega_N|_{N-1}, N \in \mathbb{N}\}.$$

ただし  $\omega_N|_{N-1} = [\omega_N(t) | 0 \leq t \leq T^{ex, N-1}]_{0,1}(\omega_N)$  である。

定義 8.6 (第  $N$  成分への射影).  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega$  とするとき,

$$\pi_N \omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N)$$

と定義する.

定義 8.7 ( $\pi_N \Omega$  上の確率測度).  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_N) \in \Omega$  とするとき,  $\pi_N \Omega$  上の確率測度  $P_N^{prod}$  を

$$P_N^{prod}((\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N)) := \tilde{P}_N(\omega_N)$$

と定義する.

このようにして定めた  $P_N^{prod}$  はコルモゴロフの拡張定理の仮定の整合条件を満たす. それを示すのが以下の命題である.

命題 8.8 ( $P_N^{prod}$  が満たす整合条件).  $N \in \mathbb{Z}_+$  とするとき,

$$P_N^{prod}((\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N)) = \sum_{\omega'; \omega'|N=\omega_N} P_N^{prod}((\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N, \omega')).$$

証明.  $u \in U_{N+1}^0$  とする. 今,  $\Delta_0 = \Delta O a_0^0 b_0^0$  とすれば  $u_1 := (3^{-N} \hat{Q}_N u)$  は,  $u_1 \in \Gamma_0^0 = \{(O, a_0^0), (O, b_0^0), (O, b_0^0, a_0^0), (O, a_0^0)\}$  を満たす.

ここで  $v_1^* = (O, a_0^0), v_2^* = (O, b_0^0), v_3^* = (O, b_0^0, a_0^0), v_4^* = (O, a_0^0)$  とおけば,  $\hat{Q}_N$  の性質より,  $P_{N+1}^{0,(k)}(u_1 = v_j^*) = \hat{P}_1^{0,(k)}(v \in \Gamma_1^0; v|_{\Delta_0} = v_j^*)$  となることに注意する.

$\Delta = \Delta O a_N^0 b_N^0$  とするとき,  $\hat{w} \in \Gamma_N^0$  に対して,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{N+1}^{0,(k)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= P_{N+1}^{0,(k)}(u \in U_{N+1}^0; Lu|_{\Delta} = \hat{w}) \\ &= \sum_{j=1}^4 P_{N+1}^{0,(k)}(Lu|_{\Delta} = \hat{w}|u_1 = v_j^*) P_{N+1}^{0,(k)}(u_1 = v_j^*) \\ &= \sum_{j=1}^4 \hat{P}_N^{0,(j)}(\hat{w}) P_1^{0,(k)}(v \in \Gamma_1^0|v|_{\Delta_0} = v_j^*). \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \hat{P}_{N+1}^{0,(1)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= \frac{127}{252} \hat{P}_N^{0,(1)}(\hat{w}) + \frac{359}{1260} \hat{P}_N^{0,(2)}(\hat{w}) + \frac{181}{1260} \hat{P}_N^{0,(3)}(\hat{w}) + \frac{17}{252} \hat{P}_N^{0,(4)}(\hat{w}), \\ \hat{P}_{N+1}^{0,(3)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= \frac{79}{252} \hat{P}_N^{0,(1)}(\hat{w}) + \frac{587}{1260} \hat{P}_N^{0,(2)}(\hat{w}) + \frac{19}{180} \hat{P}_N^{0,(3)}(\hat{w}) + \frac{29}{252} \hat{P}_N^{0,(4)}(\hat{w}). \end{aligned}$$

$k = 2, 4$  に対しては,  $y = x/\sqrt{3}$  に対する  $\hat{w}, v_j^*$  の線対称を  $\hat{w}^R, v_j^{*R}$  と表すことにすると,  $v_1^{*R} = v_2^*, v_3^{*R} = v_4^*$  であるから

$$\begin{aligned} \hat{P}_{N+1}^{0,(k)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= P_{N+1}^{0,(k)}(u \in U_{N+1}^0; Lu|_{\Delta} = \hat{w}) \\ &= \sum_{j=1}^4 P_{N+1}^{0,(k)}(Lu|_{\Delta} = \hat{w}|u_1 = v_j^*) P_{N+1}^{0,(k)}(u_1 = v_j^*) \\ &= \sum_{j=1}^4 P_{N+1}^{0,(k)}(Lu|_{\Delta} = \hat{w}^R|u_1 = v_j^{*R}) P_{N+1}^{0,(k)}(u_1 = v_j^{*R}) \\ &= \hat{P}_N^{0,(2)}(\hat{w}^R) P_1^{0,(1)}(v \in \Gamma_1^0|v|_{\Delta_0} = v_2^*) + \hat{P}_N^{0,(1)}(\hat{w}^R) P_1^{0,(1)}(v \in \Gamma_1^0|v|_{\Delta_0} = v_1^*) \\ &\quad + \hat{P}_N^{0,(4)}(\hat{w}^R) P_1^{0,(1)}(v \in \Gamma_1^0|v|_{\Delta_0} = v_4^*) + \hat{P}_N^{0,(3)}(\hat{w}^R) P_1^{0,(1)}(v \in \Gamma_1^0|v|_{\Delta_0} = v_3^*). \end{aligned}$$



したがって,

$$\begin{aligned}\hat{P}_{N+1}^{0,(2)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= \frac{359}{1260} \hat{P}_N^{0,(1)}(\hat{w}) + \frac{127}{252} \hat{P}_N^{0,(2)}(\hat{w}) + \frac{17}{252} \hat{P}_N^{0,(3)}(\hat{w}) + \frac{181}{1260} \hat{P}_N^{0,(4)}(\hat{w}), \\ \hat{P}_{N+1}^{0,(4)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= \frac{587}{1260} \hat{P}_N^{0,(1)}(\hat{w}) + \frac{79}{252} \hat{P}_N^{0,(2)}(\hat{w}) + \frac{29}{252} \hat{P}_N^{0,(3)}(\hat{w}) + \frac{19}{180} \hat{P}_N^{0,(4)}(\hat{w})\end{aligned}$$

を得る. これより

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \alpha_k \hat{P}_{N+1}^{0,(k)}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k \hat{P}_N^{0,(k)}(\hat{w}), \\ \sum_{k=1}^4 \alpha_k &= 1\end{aligned}$$

を満たす  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  計算すると  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\frac{491}{1248}, \frac{491}{1248}, \frac{133}{1248}, \frac{133}{1248})$  を得るので,

$$\tilde{P}_{N+1}(w \in \Gamma_{N+1}^0; w|_{\Delta} = \hat{w}) = \tilde{P}_N(\hat{w})$$

であるから,  $P_N^{prod}$  の整合条件が示されたことになる.  $\square$

このことが示されたことによってコルモゴロフの拡張定理より,  $\Omega$  の cylinder set 全体で生成される  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  を考えて可測空間  $(\Omega, \mathcal{B})$  上の確率測度  $P$  で

$$P \circ \tau_N^{-1} = P_N^{prod}$$

を満たすものが一意に存在する.

$P_N^{prod}$  は  $F'_N$  上の  $a_N^0$  ないし  $b_N^0$  で止まる loop-erased random walk  $X_N$  とおくと

$$P_N^{prod}((\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N)) = \tilde{P}_N(\omega_N) = \tilde{P}_N(w \in \Gamma_N^0; X_N(w)(j) = \omega_N(j), j = 0, \dots, T_{0,1}^{ex,N}(w))$$

で  $X_N$  の分布を与えているから  $P_N^{prod}$  が  $\Omega$  の上に一意的に拡張されたことは  $X_N$  も  $F_0^0$  全体に一意的に拡張されたことと同値である. したがって,  $F_0^0$  上の loop-erased random walk  $X$  が一意的に定まる;

各  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega, j \in \mathbb{Z}_+$  に対して  $N$  が  $j \leq 3^N$  であるとき,

$$X(\omega)(j) = \omega_N(j).$$

三角形  $\Delta O a_N^0 b_N^0$  の内部の loop-erased random walk が通過する点で,  $3^N \leq j$  で  $\omega_N(j) \in \Delta O a_N^0 b_N^0$  となってしまう点もあるが  $\omega_{N+1}|_N = \omega_N$  より, この分の点たちは  $\omega_{N+1}$  を用いて  $X(\omega)(j) = \omega_{N+1}(j)$  とするということである. つまり, 右辺の一意性には条件  $\omega_N|_{N-1} = \omega_{N-1}$  が役割を果たしているということもできる.

## 9 loop-erased random walk の変位の指数

以下では上で定義した loop-erased random walk  $X$  に関する変位の指数と重複対数の法則に関して論じてゆく. 以下の議論の本質的な意味は path の成分がどれくらいの速さで原点から遠ざかっていくかを表したものである.

まず,  $X$  を上で定義した loop-erased random walk とするとき

$$\tilde{\Phi}_N(x, y) := \frac{491}{624} \Phi_N^1(x, y) + \frac{133}{624} \Phi_N^2(x, y)$$

とおけば、 $\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(X)$  のラプラス変換  $\tilde{g}_N(t)$  は

$$\tilde{g}_N(t) := \tilde{\Phi}_N(e^{-t\lambda^{-N}}, e^{-2t\lambda^{-N}}) = \frac{491}{624}G_N^1(t) + \frac{133}{624}G_N^2(t)$$

と表される．変位の指数を論じるためにはまだ記号と補題の準備が必要なので，以下ではそれを定義し示してゆく．以下の議論では， $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D_n(X)$  を

$$D_n(X) := \{M \geq 0; |X(i)| \leq 3^M, 0 \leq i \leq n\}$$

とし自然数  $K = K(n)$  を

$$\lambda^K \leq n < \lambda^{K+1}$$

を満たすようにとる．ここで定義した記号を使うと以下のようなことが成り立つ．

**補題 9.1** (short-path estimate). ある正の定数  $C_8, C_9$  が存在して，任意の  $K(n) > M$  を満たす  $n, M \in \mathbb{N}$  に対して

$$P(D_n(X) < K(n) - M) \leq C_8 e^{-C_9 \lambda^M}$$

が成り立つ．

**証明．** まず，任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対してチェビシエフの不等式より

$$\tilde{P}_N(\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(X) \geq \lambda^M) \leq e^{-\lambda^M} \int e^{\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(X(w))} \tilde{P}_N(dw) = e^{-\lambda^M} \tilde{g}_N(-1)$$

が得る．このとき，ある正の定数  $C_8, C_9$  が存在して

$$e^{-\lambda^M} \tilde{g}_N(-1) \leq C_8 e^{-C_9 \lambda^M}$$

とできるから，

$$\tilde{P}_N(\lambda^{-N}T_{0,1}^{ex,N}(X) \geq \lambda^M) \leq C_8 e^{-C_9 \lambda^M}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} P(D_n(X) < K(n) - M) &\leq P(T_{0,1}^{ex,K-M}(X) > n) \\ &= \tilde{P}_{K-M}(T_{0,1}^{ex,K-M}(X) > n) \\ &\leq \tilde{P}_{K-M}(T_{0,1}^{ex,K-M}(X) > \lambda^K) \\ &\leq \tilde{P}_{K-M}(\lambda^{-(K-M)}T_{0,1}^{ex,K-M}(X) > \lambda^M) \\ &\leq C_8 e^{-C_9 \lambda^M} \end{aligned}$$

である． □

この補題と，任意の  $\mathbb{N}$  値確率変数  $Y$  と任意の  $s > 0$  に対して， $C(s)$  を  $0 < s < 1$  に対しては  $C(s) = 1$ ， $1 < s$  に対しては  $C(s) = \frac{1}{2^s}$  で  $C(1) = 1$  を満たすものとするとき， $Y$  が満たす不等式；

$$sC(s) \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} P(Y \geq k) \leq E[Y^s] \tag{b}$$

を用いることで変位の指数の下側からの評価を得ることができる．

**命題 9.2** (変位の指数の下からの評価). 任意の  $s > 0$  に対して, ある正の定数  $C_{10}(s)$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$E[|X(n)|^s] \geq C_{10}(s)n^{s\nu}$$

が成り立つ.

**証明.** まず,  $M_0$  を十分大きくとって  $C_8 e^{-C_9 \lambda_0^M} < 1/3$  となるようにする. また  $n_1$  を  $K(n_1) > M_0 + 1$  を満たすように十分大きくとる. すると任意の  $n \geq n_1$  に対して  $K(n) \geq K(n_1)$  であるから, 補題 9.1 より,

$$\begin{aligned} P(|X(n)| \leq 3^{K(n_1)-M_0-1}) &\leq P(D_n(X) \leq K(n_1) - M_0 - 1) \\ &\leq P(D_n(X) \leq K(n_1) - M_0) < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ. また,  $X(n) = (x, y)$  とすると  $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$  かつ  $y \in \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{Z}_+$  であるから  $4|X(n)|^2 \in \mathbb{Z}_+$  であることに注意する. ここで  $s > 2$  かつ  $Y = 4|X(n)|^2$  とすると  $n \geq n_1$  に対して,

$$\begin{aligned} E[|X(n)|^s] &= \frac{1}{2^s} E[(4|X(n)|^2)^{s/2}] \\ &\geq \frac{1}{2^s} \frac{s/2}{2^{s/2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s/2-1} P(Y \geq k) \\ &\geq \frac{1}{3^s} \frac{s/3}{3^{s/2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s/2-1} P(Y \geq k) \\ &\geq \frac{s}{3^{3s/2+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=9^{m+1}}^{9^{m+2}-1} (9^{m+1})^{s/2-1} P(Y > 9^{m+2}) \\ &\geq \frac{s}{3^{3s/2+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (9^{m+1})^{s/2} P(|X(n)| > 3^{m+2}) \\ &\geq \frac{s}{3^{3s/2+1}} (9^{K(n)-M_0-2})^{s/2} P(|X(n)| > 3^{K(n)-M_0-1}) \\ &\geq \frac{s}{3^{3s/2+1}} (3^{K(n)-M_0-2})^s (1 - P(|X(n)| \leq 3^{K(n)-M_0-1})) \\ &\geq s 3^{-(M_0 s + \frac{7}{2}s + 1)} 3^{K(n)s} \frac{2}{3} \geq s 3^{-(M_0 s + \frac{7}{2}s + 2)} 3^{K(n)s} \geq s 3^{-(M_0 s + \frac{7}{2}s + 2)} n^{s\nu} \end{aligned}$$

となる. そこで,  $\tilde{C}_{10} = s 3^{-(M_0 s + \frac{7}{2}s + 2)}$  とおき,  $C_{10} = \tilde{C}_{10} \wedge n_1^{-s\nu}$  とおけば命題の不等式を得る.  $0 < s \leq 2$  の場合も同様に示せる.  $\square$

このようにして変位の指数の下からの評価を得たが, 変位の指数の上からの評価は特別な準備をしなくとも直接示すことができるので以下で示す.

**命題 9.3** (変位の指数の上からの評価). 任意の  $s > 0$  に対して, ある正の定数  $C_{11}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$E[|X(n)|^s] \leq C_{11} n^{s\nu}$$

が成り立つ.

**証明.** まず任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 任意の  $0 < c_2 < 1$  を一つ固定するごとに

$$G_{K+2}^1(t_0) \vee G_{K+2}^2(t_0) < c_2$$

となる  $t_0 > 0$  を一つ固定する．更にそのとき，十分大きい  $M_{c_2} \in \mathbb{N}$  をとって

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{M_{c_2}}{1-\nu}} \frac{(-\log c_2)^{1/(1-\nu)}}{t_0^{1/(1-\nu)}} < \varepsilon$$

を満たすようにする．このとき，任意の  $s > 0$  と，上と同じ  $\varepsilon > 0$  に対して，

$$s \log 3 + \varepsilon < -3^{K+1} \log c_2$$

を満たすように  $0 < c_2 < 1$  を十分小さくとると，上で定めたその  $c_2$  に対応する  $M_{c_2} \in \mathbb{N}$  と  $t_0$  があって，

$$s \log 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{M_{c_2}}{1-\nu}} \frac{(-\log c_2)^{1/(1-\nu)}}{t_0^{1/(1-\nu)}} < s \log 3 + \varepsilon < -3^{K+1} \log c_2$$

とすることができる．よって十分小さな  $0 < c_2 < 1$  と任意の  $M > M_{c_2}$  に対して

$$s \log 3 + 3^{K+1} \log c_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{M}{1-\nu}} \frac{(-\log c_2)^{1/(1-\nu)}}{t_0^{1/(1-\nu)}} < 1$$

である．

そして，命題 7.3 の証明の中の  $t_0 > 0$  のとり方の任意性から，上で十分小さく取った  $0 < c_2 < 1$  と，それに対応して定まる  $t_0 > 0$  を用いて命題 7.3 の証明を行ったと考える．そこで出てくる正の定数  $C_1 = -\frac{\log c_2}{t_0}$  を用いて，命題 7.4 の証明中に出てきた  $s_* = \left(\frac{C_1 \nu}{\xi}\right)^{1/(1-\nu)}$  を考え， $M > M_{c_2}$  とし  $\xi = \lambda^M$  とするとき，

$$1 > 3^s c_2^{3^{K+1}} \exp((\lambda^M)^{-\nu/(1-\nu)} \frac{(-\log c_2)^{1/(1-\nu)}}{t_0^{\nu/(1-\nu)}}) = 3^s c_2^{3^{K+1}} e^{s_* \xi}$$

が成り立つ．そして以下で使うために， $c > 0$  を  $1 > c > c_2^{3^{K+1}} \exp((\lambda^M)^{-\nu/(1-\nu)} \frac{(-\log c_2)^{1/(1-\nu)}}{t_0^{\nu/(1-\nu)}}) = c_2^{3^{K+1}} e^{s_* \xi}$  とすることで，

$$1 > 3^s c > 3^s c^2$$

を得る．

また，ここで上で定めた  $C_1$  と  $t_0$  を用いて  $C_5 = \frac{C_1 \nu}{t_0^{1-\nu}}$  とするとき， $(3^{\frac{1}{\nu}-1})^{K+2} \lambda^M \geq C_5$  を満たすような十分大きな  $M > 0$  をとり，このとき， $K+2 > \log_\lambda(s_*/t_0)$  であることに注意する．今， $M' := \max\{M, M_{c_2}\}$

とすると、上で示したことと、命題 7.3 の証明と、命題 7.4(2) の証明より、

$$\begin{aligned}
P(|X(n)| > 3^{K(n)+2}) &= \frac{491}{1248} (\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(1)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n) + \hat{P}_{K(n)+2}^{0,(2)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)) \\
&\quad + \frac{133}{1248} (\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(3)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n) + \hat{P}_{K(n)+2}^{0,(4)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)) \\
&\leq \frac{491}{1248} (\max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)\} + \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)\}) \\
&\quad + \frac{133}{1248} (\max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)\} + \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)\}) \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq n)\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq \lambda^{K(n)+1})\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(\lambda^{-(K+2)} T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq \lambda^{-1})\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}(\lambda^{-(K+2)} T_{0,1}^{ex,K+2}(w) \leq \lambda^{M'})\} \\
&\leq e^{s_* \xi} \max_{j=1,2,3,4} \{G_{K(n)+2}^{(j)}(s_*)\} \\
&\leq c_2^{3^{K(n)+1}} e^{s_* \xi} < c
\end{aligned}$$

とできる．ただし  $G_{K(n)+2}^{(j)}$  は確率測度  $\hat{P}_{K(n)+2}^{0,(j)}$  のラプラス変換とする．ここで任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対して、 $\Phi_N := (\Phi_N^1, \Phi_N^2)$  とおけば、明らかに、

$$\Phi_{N+1} = \underbrace{\Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_1}_{N+1}$$

であるから

$$\Phi_{N+1} = \Phi_1 \circ \Phi_N$$

となる．したがってこの式を、確率測度の関係で見れば、 $w \in \hat{W}_{N+1}^0$  のとき、 $\sigma_N^0(w) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  とし、 $w_j = w|_{\Delta_j} = \{w(t); T_{0,j-1}^{ex,N} \leq t \leq T_{0,j}^{ex,N}\}$  とすると、

$$\hat{P}_{N+1}^{0,1}(w) = \sum_{\substack{u \in \hat{W}_1^0; \\ \sigma_1^0(u) = 3^{-N} \sigma_N^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_N^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \hat{P}_1^{0,1}(u),$$

$w \in \hat{V}_{N+1}^0$  のときは、

$$\hat{P}_{N+1}^{0,2}(w) = \sum_{\substack{u \in \hat{V}_1^0; \\ \sigma_1^0(u) = 3^{-N} \sigma_N^0(w)}} \left( \prod_{j=1}^k \hat{P}_N^{0,r(j)}(\eta(\mu_1(w_j))) \right) \hat{P}_1^{0,2}(u)$$

を得る．ここで

$$\{T_{0,1}^{ex,K+3} \leq n\} = \left\{ \sum_{l=1}^k T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq n \right\} \subset \bigcap_{l=1}^k \{T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq n\}$$

であるから、上で得た結果と  $X(n)$  が  $F'_{K+3}$  の外に出るには少なくとも  $F'_{K+2}$  と同じ形の図形を 3 回通らなければならないから、スケルトンの元の個数  $k$  は  $k \geq 3$  であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
P(|X(n)| > 3^{K(n)+3}) &\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K+3}^{0,(j)}(T_{0,1}^{ex,K+3}(w) \leq n)\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_{K+3}^{0,(j)}(\bigcap_{l=1}^k \{T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq n\})\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) \left( \prod_{l=1}^k \hat{P}_{K+2}^{0,r(j)}(\{T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq n\}) \right) \right\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) \left( \prod_{l=1}^k \hat{P}_{K+2}^{0,r(j)}(\{T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq \lambda^{K+1}\}) \right) \right\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) \left( \prod_{l=1}^k \hat{P}_{K+2}^{0,r(j)}(\{\lambda^{-(K+2)}T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq \lambda^{-1}\}) \right) \right\} \\
&\leq \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) \left( \prod_{l=1}^k \hat{P}_{K+2}^{0,r(j)}(\{\lambda^{-(K+2)}T_{0,1}^{ex,K+2}(\eta \mu_1 w_l) \leq \lambda^{M'}\}) \right) \right\} \\
&< \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) c^k \right\} \\
&\leq c^3 \max_{j=1,2,3,4} \left\{ \sum_{\substack{u \in \Gamma_N^0; \\ \sigma_1^0(u)=3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w)}} \hat{P}_1^{0,(j)}(u) \right\} \\
&\leq c^3 \max_{j=1,2,3,4} \{\hat{P}_1^{0,(j)}(u \in \Gamma_N^0; \sigma_1^0(u) = 3^{-(K+2)}\sigma_{K+2}^0(w))\} \\
&\leq c^3
\end{aligned}$$

であり、同様の考え方によって、

$$P(|X(n)| > 3^{K(n)+4}) \leq c^9, P(|X(n)| > 3^{K(n)+5}) \leq c^{27}, \dots$$

を得る．ゆえに  $\lambda^K \leq n < \lambda^{K+1}$  ならば  $3^K \leq n^\nu < 3^{K+1}$  に注意すると，

$$\begin{aligned}
E[|X(n)|^s] &\leq (3^{K+2})^s P(|X(n)| \leq 3^{K+2}) + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{K+2+j})^s P(3^{K+2+(j-1)} < |X(n)| \leq 3^{K+2+j}) \\
&\leq (3^{K+2})^s \cdot 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{K+2+j})^s P(3^{K+2+(j-1)} < |X(n)|) \\
&\leq (3^{K+2})^s + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{K+2+j})^s P(3^{K+2+(j-1)} < |X(n)|) \\
&\leq (3^{K+2})^s + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{K+2+j})^s c^{3^{j-1}} \\
&\leq (3^K)^s \left( (3^2)^s + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{j+2})^s c^{3^{j-1}} \right) \\
&\leq n^{s\nu} \left( (3^2)^s + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{j+2})^s c^{3^{j-1}} \right)
\end{aligned}$$

を得る．したがって， $\frac{(3^{j+3})^s c^{3^j}}{(3^{j+1})^s c^{3^{j-1}}} = 3^s c^{2 \cdot 3^{j-1}} < 3^s c^2 < 1$  より， $n$  に依らない定数を  $C_{11} = (3^2)^s + \sum_{j=1}^{\infty} (3^{j+2})^s c^{3^{j-1}} < \infty$  とおくと変位の指数の上からの評価を得る．  $\square$

以上の議論をまとめると以下の定理を得る．

**定理 9.1** (loop-erased random walk の変位の指数)．任意の  $s > 0$  に対して，ある正の定数  $C_{10}, C_{11}$  が存在して，

$$C_{10} n^{s\nu} \leq E[|X(n)|^s] \leq C_{11} n^{s\nu}$$

が成り立つ．ただし  $\nu = \frac{\log 3}{\log \lambda}$  とする．

## 10 loop-erased random walk の重複対数の法則

変位の指数に関する議論が終わったので，重複対数の法則について以下で述べる．変位の指数の議論では平均的な path の振る舞いしか情報が得られなかったが，以下で論じる重複対数の法則では path 1 本に関する情報が得られる．

以下でまず論じるのは重複対数の法則の上からの評価である．

**命題 10.1** (重複対数の法則の上からの評価)．ある正の定数  $C_{12}$  が存在して， $\psi(n) := n^\nu (\log \log n)^{1-\nu}$  とするとき，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \leq C_{12}, \quad P - a.s.$$

が成り立つ．

**証明．** [3] と同じ流れなので補遺に回す．  $\square$

下からの評価も適切な補題の準備の下，[3] と同じ手法で得られる．したがって細かい証明は補遺に回し，結果だけを以下に述べる．

**命題 10.2** (重複対数の法則の下からの評価). ある正の定数  $C_{13}$  が存在して,  $\psi(n) := n^\nu (\log \log n)^{1-\nu}$  とするとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \geq C_{12}, \quad P - a.s.$$

が成り立つ.

したがって, 定理 3 が成り立つ.

## 11 くりこみ群の計算に用いたアルゴリズム

$r = 1, 2$ ,  $N \in \mathbb{N}$  とするとき, くりこみ群  $\Phi_N^r(x, y)$  の明示的な形を求めるためには, 本質的には  $\Phi_1^r$  を調べればよいことを 6 章でみた. したがってくりこみ群の明示的な形を求めるためには  $\Phi_1^r(x, y)$  である  $\hat{P}_1^{0,r}$  の値が分かればよい. この章ではそれらを求めるアルゴリズムを導出する. なおここで導出されるアルゴリズムは, 本研究の後に続くであろう一般化や 4-gasket, 5-gasket のくりこみ群の具体的な計算を見据えて, 3-gasket や通常のシェルピンスキーの gasket のような上向き三角形を規則的に積み上げたタイプの図形全てをカバーできるように設計した. 大まかな流れとしては, まず  $F_1' \cap F_0^0$  上のループのない path を考えたうえで, その path に対して各点でのループを考え, 確率と  $3^1$ -スケールのスケルトンのタイプを考えるという流れになる. なおここで,  $F_1' \cap F_0^0$  の path のループ消しは, 5 章で定義したループ消しを適用すると, path  $(w(0), \dots, w(j), \dots, w(w(l)))$  のパラメータ  $j$  を 0 から  $l(w)$  まで順に進めていったとき, ループをできた順に消していることに他ならない. したがってこのアルゴリズムでは, ループをできた順に消すということに関する確率を計算するというアルゴリズムになる. またここでは, アルゴリズムに通常のシェルピンスキー gasket のくりこみ群の計算も含ませておきたいので,  $F_1' \cap F_0^0$  ではなく  $F_1' \cap F_0^0$  の  $y$  軸に関する線対称な図形を  $F_1' \cap F_0^0$  に加えた図形  $F_1'^1$  を用いる. つまり,  $F_1' \cap F_0^0$  上の原点  $O$  から  $a_1^0$  までの path のループの確率計算を  $F_1'^1$  上の原点  $O$  から  $a_1^0$  までの path の確率の計算に直して行うのである. それを正当化する理由付けは 6 章の議論より以下のような事実による;

$w \in W_1^1$  とするとき,  $w$  は原点において, 原点から出発して原点に 1 回だけ戻るという原点での  $3^0$ -スケールの 1 重のループを持つとする.  $w$  のループの部分 path の切片として  $l$  と表し,  $w$  のループでない部分を  $w_r$  と表す. つまり  $w = (l, w_r)$  である. また  $l$  を  $y$  軸を軸に反転させたものを  $l'$  とする. 更に  $w' := (l', w_r)$  と定義する. ここで 6 章の定義 6.1 の  $P^i$  を使って

$$P^1(O \rightarrow a_1^0) := P^1(O \text{ を出発し, } a_1^1, b_1^0, b_1^1 \text{ に到達せずに } a_1^0 \text{ に到達する}) = \frac{1}{4}$$

と表現することに注意すると,  $P_N^{0,1}$  の定義と,  $l$  及び  $w_r$  と  $\eta(l)$  及び  $\eta(w_r)$  の一歩目の確率を考えることによって,

$$\begin{aligned} P^1(w|O \rightarrow a_1^0) + P^1(w'|O \rightarrow a_1^0) &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} (P^1(l) + P^1(l')) P^1(w_r) \\ &= 4P^0(\eta(l))P^1(w_r) \\ &= 2P^0(l)2P^1(w_r) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} P^0(l)P^0(\eta(w_r)) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} P^0(\eta((l, w_r))) = P_1^{0,1}(\eta(w)) \end{aligned}$$



である。  $w \in V_1^1$  に対しても同様の計算によって、  $P^1(O \rightarrow b_1^0 \rightarrow a_1^0) = (\frac{1}{4})^{-2}$  に注意すれば、

$$P^1(w|O \rightarrow b_1^0 \rightarrow a_1^0) + P^1(w'|O \rightarrow b_1^0 \rightarrow a_1^0) = P_1^{0,2}(\eta(w))$$

である。つまり  $w \in \hat{W}_1^0$  に対して

$$\hat{P}_1^{0,1}(w) = P^1(L^{-1}(\eta^{-1}(w) \in W_1^1 \text{ のうち } a_1^0 \text{ を含む})|O \rightarrow a_1^0)$$

などとし、右辺をアルゴリズムを使って求めようというのである。よってまず  $F_1^1$  上のループのない path で行き先が  $a_1^0$  のもの、すなわち  $\hat{W}_1^0 \cup \hat{V}_1^0$  の元で行き先が  $a_1^0$  のものを計算機を使って求めるというステップから始める。

## 11.1 図形の隣接行列

図形上の path に関することを計算機を使って調べるには、図形の情報を計算機が扱える情報として入力しなければならない。それを実現するのが隣接行列である。

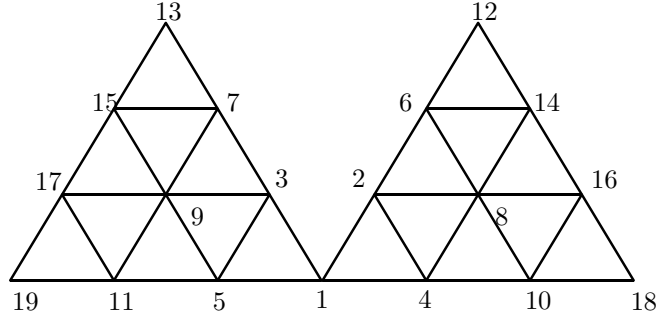
**定義 11.1.** 頂点集合が  $G = \{1, \dots, k\}$  であり、辺の集合が  $E$  であるグラフ  $(G, E)$  に対して、以下のようにして定まる  $k \times k$ -行列  $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  をグラフ  $(G, E)$  の隣接行列という；

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}.$$

特に、  $n_{i,j} = 1$  のところを 1 でない値に置き換えたものをグラフ  $(G, E)$  の重み付きの隣接行列という。

**注意 11.2.** 隣接行列の第  $i$  行は点  $i \in G$  から延びる辺の情報を与える。例えば行ベクトル  $n_{1j}$  は点  $1 \in G$  から延びる辺の情報を与えている。逆に第  $j$  列は点  $j$  に向かう辺の情報を与える。例えば、列ベクトル  $n_{i1}$  は頂点  $1 \in G$  に向かう辺の情報を与える。

$\hat{W}_1^0 \cup \hat{V}_1^0$  の元で行き先が  $a_1^0$  のものを計算機を使って求めるためには、それだけであれば隣接行列でも議論の本質には影響はないが、確率計算のことも考慮して  $F_1^1$  上の重み付きの隣接行列を用いる。ただし重み付きの隣接行列を用いる場合、  $F_1^1$  の各点に番号を振らなければならないが、規則性なく振ったのではあまりいい結果は得られない。ここで重要なことは、path には始点から終点に向かうという方向性があり、その方向性に沿った番号付けが必要であるということ、図形の持つ構造そのものに着目した番号付けをすることで、その図形の特性を生かすことができるということである。結果から言ってしまうと、今は原点からのびる path に関して考えたいので、原点から離れていくごとに番号が大きくなるようにすれば、  $F_1^1$  上の path をうまく考えることができる。更にその番号の”増え方”に関する規則を以下のように定めれば、図形の性質も活用しつつ path を、計算機を使って入力された重み付き隣接行列からうまく生成することができる。以下がこのような考えの下、  $F_1^1$  の頂点に番号を付けたものである。



そして、このような番号付けをすると重み付き隣接行列は以下ようになる。

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし重みは、確率計算の都合上、もし  $i$  行目の正の成分が 2 つならば、正の成分の重みは  $n_{ij} = \frac{1}{4}$  ととり (このようにとる理由は番号を付けた図形の外側にも図形が広がっているからである)、 $i$  行目の正の成分が 3 つ以上ならば  $n_{ij} = (\mathcal{N}_1^1(i))^{-1}$  とする。そして以下では見易さの点から  $n_{ij} = n_{i,j}$  と表記する場合もある。

## 11.2 path の配列と上向き三角形の配列を生成するアルゴリズム

セクション 11.1 で得られた隣接行列を用いてここでは  $O$  から  $a_1^0$  へのループのない path の配列を生成する。また、そのアルゴリズムのステップ数や、のちに行うタイプ判定のアルゴリズムの導出のため、 $3^0$ -スケール上向き三角形の配列の生成もここで述べておく。注意として、ここでは  $|N|$  を重み付き隣接行列の列数とする。また配列  $A$  やベクトル  $V$  に対してその成分の数を  $|A|, |V|$  などと表す。配列  $A$  を  $A = [A[1], \dots, A[|A|]]$  などと表すことにする。まずは、本題の path の配列を作ることから始める。例えば、終点が  $a_1^0$  でない  $\text{path}(1, 4, \dots, k)$  に対して、ループを作らないように path を延長することを考えると、隣接行列を使えば以下のように表現できる；

1 隣接行列に対してまず以下の操作を行う；

任意の  $1 \leq i \leq |N|$  に対して、 $n_{i1} = 0, n_{i4} = 0, \dots, n_{ik} = 0$  とおき、 $1, 4, \dots, k$  へと向かう辺の情報を

つぶす.

2  $n_{kj} > 0$  となる  $j$  がもしあるならば,  $(1, 4, \dots, k, j)$  はループのない path である.

したがって, このようなことを繰り返し path を伸ばし, 目的の path の配列を得ることを考える. ここで例えば上記のステップ 1 と 2 により, path(1) から path(1, 2) 及び path(1, 4) を得ることを path の増殖と呼ぶことにすると, 目的の path の配列を得るまでに繰り返す増殖のステップ数は, 高々, 一番長いループがあるかも知れない path (グラフの全ての点を通る path) の生成の際の増殖のステップ数である図形の辺の個数, すなわち  $|Tr| := \#\{3^0\text{-上向き三角形}\} \times 3$  である, このことに注意すると, path の配列を得るアルゴリズムは以下の Algorithm 1 になる. ただしここで,  $C \leftarrow C + 1$  で,  $C$  に  $C + 1$  を代入することを表す.

---

**Algorithm 1** generate no-loop path O to  $a_1^0$

---

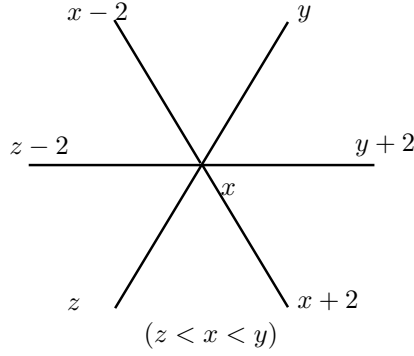
```

 $P \leftarrow [[1]]$ 
 $Ptem$  は空の配列
for  $i = 1$  to  $|Tr|$  do
  for  $j = 1$  to  $|P|$  do
    for  $k = 1$  to  $|P[j]|$  do
      for  $l = 1$  to  $|N|$  do
         $n_{l, P[j][k]} \leftarrow 0$ 
      end for
    end for
     $Counter \leftarrow 0$ 
    for  $m = 1$  to  $|N|$  do
      if  $n_{|P[j]|m} > 0$  then
         $Ptem$  に  $[P[j][1], \dots, P[j][|P[j]|], m]$  を加える
         $Counter \leftarrow Counter + 1$ 
      end if
    end for
    if  $Counter = 0$  then
       $P[j]$  を  $Ptem$  に追加
    end if
  end for
   $P \leftarrow Ptem$ 
   $Ptem$  に空の配列  $[]$  を代入
end for
 $P$  を出力

```

---

また, path の配列を得るアルゴリズムのステップ数に使った  $3^0$ -スケール上向き三角形の個数は,  $3^0$ -スケール上向き三角形の配列を得ることによって直接計算できる.  $3^0$ -スケール上向き三角形の配列を得ることは, 図形に対して最初に施した頂点の番号付けから各頂点が以下の図のような状態になっていることから容易に求めることができる.



ここで  $y$  は隣接行列を用いて表現すると,  $j > x$  かつ  $j \neq x+2$  で  $n_{xj} > 0$  となる最小のものがもし存在するならば, これが  $y$  であるとわかる. したがって頂点が  $v_1, v_2, v_3 (v_1 < v_2 < v_3)$  である  $3^0$ -上向き三角形をベクトル  $(v_1, v_2, v_3)$  を使って一意的に表すとすれば,  $(x, y, y+2)$  によって  $3^0$ -上向き三角形が一つ得られたことになる. よって図形のすべての点  $x$  でこのような方法で  $y$  が存在するときのみ  $(x, y, y+2)$  を作っていけば, 目的の  $3^0$ -スケール上向き三角形の配列が得られる. これをアルゴリズムとして表すと以下の Algorithm 2 になる. ただしここで考えているループのない path は, すべて奇数で番号付された点を通らない path であるから, Algorithm 1 で考えるべき  $|Tr|$  は偶数の番号の頂点を持つ上向きの  $3^0$ -三角形である. のちに行われるタイプ判定というアルゴリズムでもそれで充分である. したがって Algorithm 2 では偶数の番号の頂点で構成される  $3^0$ -上向き三角形の配列を求めている.

---

**Algorithm 2** make  $3^0$ -upper triangles

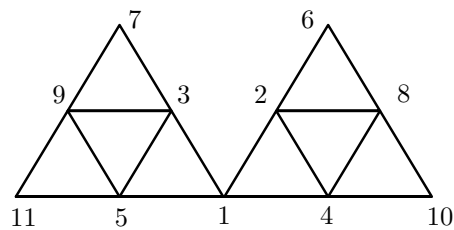
---

```
 $Tr \leftarrow [1, 2, 4]$ 
 $Y \leftarrow []$ 
 $Counter \leftarrow 0$ 
 $i = 1$ 
 $j = 0$ 
while  $j = 0$  do
   $n_{2i, 2i+2} \leftarrow 0$ 
  for  $k = 2i$  to  $|N|$  do
    if  $n_{2i, k} > 0$  then
       $Counter \leftarrow Counter + 1$ 
       $Y$  に  $k$  を追加
    end if
  end for
  if  $Counter = 0$  then
     $Tr$  を出力
     $j \leftarrow 1$ 
  else
     $Y$  の最小の元を探してそれを  $y$  とする
     $Tr$  の最後尾に  $[2i, y, y + 2]$  を加える
     $i \leftarrow i + 1$ 
  end if
end while
 $Tr$  を出力
```

---

### 11.3 $\Phi_1^r$ の係数の計算

これは原理を説明するより実際の計算過程を見ていく方が理解しやすい。したがってまずは通常のシェルピンスキーの gasket の場合の計算を見ていく。通常のシェルピンスキーの gasket の先に述べた考察に基づく頂点の番号付けと、重み付き隣接行列は以下ようになる；



$$N' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この状況下で、例えば  $\text{path}(1, 2, 6) \in \hat{W}_1^0$  に関して  $\hat{P}_1^{0,1}((1, 2, 6))$  の計算を行ってみる (通常のシェルビンスキーのガスケットにも 3-gasket と同じ要領で  $W_N^0$  等を定義する). ここで先の注意から  $(1, 2, 6)$  に関するループの確率和は  $\eta^{-1}(1, 2, 6)$  のうち 6 を含む path について付きうるループを  $P^1(\cdot | O \rightarrow a_1^0)$  で測ったものを求めればよいと分かる. なお  $(1, 2, 6)$  にループをつけることを考えるとき,  $\hat{P}_1^{0,1}$  で測るということから, 必ず  $W_1^1$  の元を考えることに注意する. まず, 原点 1 でのループを考える. 今,

$$f^g := \sum_{\substack{w'; g \text{ スタートで } w'(l(w')) \text{ で初めて} \\ g \text{ に戻る } F_1^{11} \text{ 上の path}}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w')},$$

$$f_{g,h} := \sum_{\substack{w'; g \text{ スタートで } w'(l(w')) \text{ で初めて} \\ h \text{ に hit し停止する } F_1^{11} \text{ 上の path}}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w')}, \quad g, h \in \{F_1^{11} \text{ の頂点} \}$$

と定義する. このとき, 頂点 1 での 1 重のループ  $l$  に関する  $P^1(l|O \rightarrow a_1^0)$  を考えられる 1 重ループすべてにわたって足し合わせた和は  $\frac{1}{4}f^1$  に等しくなる. 2 重ループや 3 重ループに関しては  $\frac{1}{4}(f^1)^2$  や  $\frac{1}{4}(f^1)^3$  を計算すればよいので, 以下ではまず,  $f^1$  を求めることを考える. 定義から  $f^1$  は以下のように表現できる;

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{1}{4}f_{21} + \frac{1}{4}f_{31} + \frac{1}{4}f_{41} + \frac{1}{4}f_{51}, \\ f_{2,1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{4,1} + \frac{1}{4}f_{8,1}, \\ f_{3,1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{5,1} + \frac{1}{4}f_{9,1}, \\ f_{4,1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{2,1} + \frac{1}{4}f_{8,1}, \\ f_{5,1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{3,1} + \frac{1}{4}f_{9,1}, \\ f_{8,1} &= \frac{1}{4}f_{2,1} + \frac{1}{4}f_{4,1}, \\ f_{9,1} &= \frac{1}{4}f_{3,1} + \frac{1}{4}f_{5,1}. \end{aligned}$$

したがってこの連立方程式を解いて  $f^1$  を求めることによって,  $l$  を頂点 1 で考えうるすべてのループとすれば,

$$P^1(l|O \rightarrow a_1^0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (f^1)^j = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \frac{1}{1-f^1}$$

となる。続いて頂点 2 でのループを考える。ここでは頂点 1 にはもう戻らないことに注意する。もし戻ってしまったらそれは頂点 1 でのループの一部である。したがって頂点 2 でのループ計算には  $f_{21}$  等は登場しないことになる。その結果をふまえた上での頂点 2 での 1 重のループの確率和  $f^2$  は以下の連立方程式を満たしている；

$$\begin{aligned} f^2 &= \frac{1}{4}f_{4,2} + \frac{1}{4}f_{8,2}, \\ f_{4,2} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{8,2}, \\ f_{8,2} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f_{4,2}. \end{aligned}$$

ここでも、 $f^2$  を求めたら頂点 1 でのループと同じように、

$$\frac{1}{1-f^2}$$

を計算する。最後に頂点 6 でのループを考えるが、これはループの  $W_1^1$  の path を考えるので計算しなくてよい。(実際上と同様に計算すると  $f^6 = 0$  となる)

以上の結果から、

$$\hat{P}_1^{0,1}((1, 2, 6)) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \frac{1}{1-f^1} \frac{1}{1-f^2}$$

である。この計算過程を重み付き隣接行列  $N'$  を使って表現することができる。そのために、隣接行列  $N' = (n'_{ij})$  に対する操作を以下で定める；原点 1 出発で頂点 10 に到達せずに頂点 6 に到達して停止するループのない path  $w = (w(0), \dots, w(l(w)))$  があたえられたとき、

- 1 行列に対する操作  $F^0$  を、 $i \text{ or } j = 6, 7, 10, 11$  ならば  $n'_{ij} = 0$  とおく操作と定める。
- 2 行列に対する操作  $F^k$  を、 $i \text{ or } j = 6, 7, 10, 11, w(0), w(1), \dots, w(k-1)$  ならば  $n'_{ij} = 0$  とおく操作と定める。

$F^l N'$  によって、上の操作を  $N'$  に対して行った結果の行列を表すことに注意する。頂点 6, 7, 10, 11 は、ループを付けた path が  $W_1^1$  の元になることから、ループの通ってはいけな点  $a_1^0, a_1^1, b_1^0, b_1^1$  であることに注意する。このとき、 $f^{w(k)}$  を求める連立方程式は、

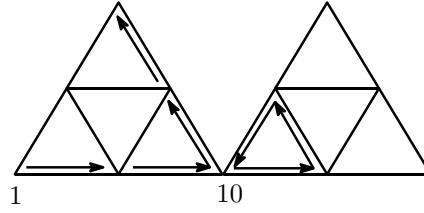
$$F^k N' \begin{bmatrix} f_{1,w(k)} \\ f_{2,w(k)} \\ \vdots \\ f_{w(k)-1,w(k)} \\ 1 \\ f_{w(k)+1,w(k)} \\ \vdots \\ f_{11,w(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,w(k)} \\ f_{2,w(k)} \\ \vdots \\ f_{w(k)-1,w(k)} \\ f^{w(k)} \\ f_{w(k)+1,w(k)} \\ \vdots \\ f_{11,w(k)} \end{bmatrix}$$

である。これを  $k = 0, 1, \dots, l(w)$  まで解き、この結果のベクトル  $(f^{w(0)}, f^{w(1)}, \dots, f^{w(l(w))})$  を用いて、

$$\hat{P}_1^{0,1}(w) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \prod_{k=0}^{l(w)} \frac{1}{1-f^{w(k)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w)}$$

である．3-gasket でも同じ原理で計算ができ， $r$  隣接行列  $N'$  を 3-gasket の隣接行列  $N$  で置き換え，頂点 6, 7, 10, 11 に相当する部分が頂点 12, 13, 18, 19 に変わるだけである．より具体的には， $F^k$  の定義と  $f^{w(k)}$  を求める連立方程式の両辺にある縦ベクトルの成分数が 11 から 19 に変わるだけである．一般の 4-gasket 等にはその都度， $a_1^0, a_1^1, b_1^0, b_1^1$  に対応する番号を用いて計算すればよい．ただし  $b_1^0$  を通るような path の確率は，ループを付けた path が必ず  $W_1^1$  になることから，0 としなければならないので，確率を計算する際に  $b_1^0$  を通るか否かで場合分けをしなければならない．

次に， $\hat{P}_1^{0,2}$  での測度の計算を考える． $w = (w(0), \dots, w(l(w)))$  を原点 1 出発で，頂点 6 に到達して停止するループのない path (頂点 6 に到達する前に頂点 10 を通っても良い) とする．ここで注意するのが path やループが  $b_1^0$ ，例えば通常のシェルピンスキーの gasket の場合，頂点 10 を通るという点である．ここで注意するのが原点でのループは  $V_1^1$  の定義から頂点 10, 11 を通らないということである．なぜならばループが頂点 10, 11 に到達したならば， $V_1^1$  の定義上，そのループは原点には戻れないからである．したがって原点でのループは  $\hat{P}_1^{0,1}$  と同じように計算すればよい．ここで例えば，通常のシェルピンスキーの gasket の場合を考えて，path(1, 4, 10, 8, 6) を  $\hat{P}_1^{0,2}$  で測ることを考える．このとき，頂点 10 でのループは，頂点 10 の右側にある番号が付いていない点にはみ出すようなループも考慮に入れなければならない．しかしそれらは，図形の形から原点 1 の右側につくループと同じ形のものである．



したがって，原点の右側につくループの確率和は  $\frac{f^1}{2}$  であるから，

$$\begin{aligned} f^{10} &= \frac{1}{4}f_{8,10} + \frac{f^1}{2} \\ f_{8,10} &= \frac{1}{4}f_{2,10} + \frac{1}{4} \\ f_{2,10} &= \frac{1}{4}f_{8,10} \end{aligned}$$

となる．これも隣接行列に対する操作で表すことができる．通常のシェルピンスキーの gasket ではループのない原点 1 出発の頂点 6 に到達して停止する path  $w = (w(0), \dots, w(l(w)))$  に対して，隣接行列  $N'$  に対する操作を以下のように定義する；

- 1  $\hat{F}^0 := F^0$  と定める．
- 2  $\hat{F}^k$  を， $n_{10,10} = \frac{f^1}{2}$  とおいた後， $i$  or  $j = 6, 7, 11, w(0), w(1), \dots, w(k-1)$  ならば  $n_{ij} = 0$  とおく操作と定める．



そのうえで、同様にして連立方程式,

$$\hat{F}^k N' \begin{bmatrix} f_{1,w(k)} \\ f_{2,w(k)} \\ \vdots \\ f_{w(k)-1,w(k)} \\ 1 \\ f_{w(k)+1,w(k)} \\ \vdots \\ f_{11,w(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,w(k)} \\ f_{2,w(k)} \\ \vdots \\ f_{w(k)-1,w(k)} \\ f_{w(k)} \\ f_{w(k)+1,w(k)} \\ \vdots \\ f_{11,w(k)} \end{bmatrix}$$

を  $k = 0, 1, \dots, l(w)$  で解く. その結果のベクトル  $(f^{w(0)}, f^{w(1)}, \dots, f^{w(l(w))})$  を用いて,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \prod_{k=0}^{l(w)} \frac{1}{1-f^{w(k)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w)}$$

というものを考えると,  $\hat{P}_1^{0,2}(w)$  が得られそうだが, まだこれは  $\hat{P}_1^{0,2}(w)$  とは等しくはない. というのも,  $\hat{P}_1^{0,2}(w)$  で考えるループの付いた path は必ず,  $b_1^0$  (通常のシェルピンスキーのガasket であれば 10 と番号の付いた点) を通り,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \prod_{k=0}^{l(w)} \frac{1}{1-f^{w(k)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w)}$  を考えただけでは,  $w$  にループを付けることは考えられているが, 頂点 10 を通らないループの分まで計算に入ってしまった. したがって今欲しい結果  $\hat{P}_1^{0,2}(w)$  よりも大きくなる.

ここで,  $\hat{P}_1^{0,1}(w)$  の計算を思い出すと,  $w$  につけるループはすべて  $b_1^0$  を通らないループであった.  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \hat{P}_1^{0,1}(w)$  という量を考えれば, これはまさしく  $b_1^0$  を通らないループを付けて確率和  $\prod_{k=0}^{l(w)} \frac{1}{1-f^{w(k)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w)}$  を考えてそれを,  $\left(\frac{1}{4}\right)^2$  で規格化したものであるといえる. したがってこれが上の計算という余計な分であり,

$$\hat{P}_1^{0,2}(w) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \prod_{k=0}^{l(w)} \frac{1}{1-f^{w(k)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{l(w)} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \hat{P}_1^{0,1}(w)$$

である. 3-gasket でもこの式は変わらない. これで  $\hat{P}_1^{0,1}(w), \hat{P}_1^{0,2}(w)$  が得られたので, この計算の流れをアルゴリズムにまとめると以下ようになる. ただし,  $P$  を上で得た, ループのない原点 1 から出発で,  $a_1^0$  に hit して停止する path の配列,  $w_1, w_2, \dots, w_m \in P$  ( $m = |P|$ ) とするとき以下のアルゴリズムでは,  $Keisu = [(\hat{P}_1^{0,1}(w_1), \hat{P}_1^{0,2}(w_1)), \dots, (\hat{P}_1^{0,1}(w_m), \hat{P}_1^{0,2}(w_m))]$  である.

---

**Algorithm 3** calculate probability in 3-gasket

---

$P$  は path の配列  
 $Keisu \leftarrow []$   
**for**  $i = 1$  to  $|P|$  **do**  
    **for**  $j = 1$  to  $|P[i]|$  **do**  
         $KaiW \leftarrow [], KaiV \leftarrow []$   
         $N$  をコピーしたものを  $NW$  とする  
         $N$  をもう一つコピーして  $NV$  とする  
         $v_1 = [f_{1,w(j)}, f_{2,w(j)}, \dots, f_{w(j)-1,w(j)}, 1, f_{w(j)+1,w(j)}, \dots, f_{19,w(j)}]$  の生成  
         $v_2 = [f_{1,w(j)}, f_{2,w(j)}, \dots, f_{w(j)-1,w(j)}, f^{w(j)}, f_{w(j)+1,w(j)}, \dots, f_{19,w(j)}]$  の生成  
         $F^{j-1}NW {}^t v_1 = {}^t v_2$  を解き, 得られた  $f^{w(j)}$  を  $KaiW$  の最後尾に追加する  
        再び  $v_1 = [f_{1,w(j)}, f_{2,w(j)}, \dots, f_{w(j)-1,w(j)}, 1, f_{w(j)+1,w(j)}, \dots, f_{19,w(j)}]$  の生成  
        再び  $v_2 = [f_{1,w(j)}, f_{2,w(j)}, \dots, f_{w(j)-1,w(j)}, f^{w(j)}, f_{w(j)+1,w(j)}, \dots, f_{19,w(j)}]$  の生成  
         $\hat{F}^{j-1}NV {}^t v_1 = {}^t v_2$  を解き, 得られた  $f^{w(j)}$  を  $KaiV$  の最後尾に追加する  
    **end for**  
     $p \leftarrow 1$   
    **for**  $k = 1$  to  $|KaiW|$  **do**  
         $p \leftarrow p \cdot \frac{1}{1-KaiW[k]}$   
    **end for**  
     $p_i := 4 \cdot p \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{|P[i]|-1}$  とおく  
     $q \leftarrow 1$   
    **for**  $k = 1$  to  $|KaiV|$  **do**  
         $q \leftarrow q \cdot \frac{1}{1-KaiV[k]}$   
    **end for**  
     $q_i := 4^2 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{|P[i]|-1}$  とおく  
     $Keisu$  の最後尾に  $[p_i, q_i - 4p_i]$  を追加する  
**end for**

---

## 11.4 タイプの判定

以下では,  $\hat{W}_1^0 \cup \hat{V}_1^0$  の path が通る  $3^0$ -スケール上向き三角形のタイプを判定しその個数をカウントするアルゴリズムを導く. これには少し前に作った  $Tr$  という, 図形に含まれる  $3^0$ -スケール上向き三角形をベクトルで表示した 3 次元ベクトルの配列が大変役に立つ. というのも,  $w = (w(0), w(1), \dots, w(l(w))) \in \hat{W}_1^0 \cup \hat{V}_1^0$  を一つとってきたとき, もし path の切片  $(w(j), w(j+1), w(j+2))$  の成分を並べ替えて, 小さい順に  $(w_1, w_2, w_3)$  としたとき, これに一致するものが  $Tr$  の中にあれば,  $(w(j), w(j+1), w(j+2))$  は一つの  $3^0$ -上向き三角形に含まれるからである. また,  $w$  の通るタイプ 1 の三角形の個数を  $\#Type1$ , タイプ 2 の三角形の個数を  $\#Type2$  とすると,

$$l(w) = \#Type1 + 2\#Type2$$

という関係がある．この関係から本質的には  $w$  が通るタイプ 2 の三角形の個数のみを数えれば，良いとわかる．それを加味したうえで， $\hat{W}_1^0 \cup \hat{V}_1^0$  の path が通る  $3^0$ -スケール上向き三角形のタイプを判定しその個数をカウントするアルゴリズムは以下になる．ただしアルゴリズムに現れる  $Typevector$  は， $Typevector = [\#Type1, \#Type2]$  である．

---

**Algorithm 4** counting number of type1 and type2

---

$P$  は頂点 1 出発の頂点 6 で停止するループのない path の配列  
 $Tr$  は  $3^0$ -スケール上向き三角形をベクトル表示した 3 次元ベクトルの配列  
 $counterTy \leftarrow 0$   
 $i$  は何でもいので， $1 \leq i \leq |P|$  から任意にとってきて固定しておく  
**for**  $j = 1$  to  $|P[i]| - 2$  **do**  
     $(w(j), w(j+1), w(j+2))$  を小さい順に並べ替え，結果を  $(w_1, w_2, w_3)$  とする ( $w_1 < w_2 < w_3$ )  
    **if**  $(w_1, w_2, w_3)$  と同じベクトルが  $Tr$  に含まれている **then**  
         $counterTy \leftarrow counterTy + 1$   
    **end if**  
**end for**  
 $Typevector := [(|P[i]| - 1) - 2 \cdot counterTy, counterTy]$

---

## 12 補遺

補遺では本筋の議論の見通しをよくするために，先行研究と同じ議論で示せる事柄についてまとめた．

### 12.1 スケールされた脱出時刻のラプラス変換の収束に関して

ここではまず，本筋の流れでは省略した 7 章の命題 7.2 の証明の概略について述べる．この命題はいくつかの補題が示されれば，あとは正規族を使った議論によって，コンパクト一様収束が，ある複素平面の開円盤でいえるので，あとはラプラス変換  $G_N^r(t)$  の再帰式を用いて複素平面全体に解析接続してやれば収束は示せる．また，収束からスケールされた脱出時刻の法則収束も直ちに示せる．このようにこの命題の本質的な収束の議論は正規族の性質に従うものであるので，以下では，証明に必要な補題を述べる程度にとどめる．

**命題 12.1** (命題 7.2).  $N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{C}, r = 1, 2$  とするとき以下が成り立つ．

(1)  $G_N^r(t)$  をくりこみ群を使って表示することができて，

$$G_N^r(t) = \Phi_N^r(e^{-\lambda^{-N}t}, e^{-\lambda^{-N}2t})$$

となる．

(2)  $G_N^r(t)$  は  $t \in \mathbb{C}$  である正則関数  $g_r(r)$  に広義一様収束する．

また  $g_r(t)$  は以下を満たす；

$$g_r(\lambda t) = \Phi_1^r(g_1(t), g_2(t)), \quad g_r(0) = 1.$$

(3)  $g_r$  は  $\mathbb{R}_+$  に台を持つあるボレル確率測度  $P^{*r}$  のラプラス変換である.

また  $P^{*r}$  の積分に関して確率変数列  $\lambda^{-N} T_{0,1}^{ex,N}$  はある確率変数  $T^{*r}$  に法則収束する.

以下が証明に必要な補題と、補題の証明に必要な定義である.

**定義 12.2** (平均行列から定まるノルム).  $M$  を定義 6.21 で定めた平均行列とし,  $M$  の固有値  $\lambda$  に対する正の左固有ベクトルを  $v = (v_1, v_2)$  とするとき,  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  に対して,

$$|z|_* := v_1 |z_1| + v_2 |z_2|$$

とノルムを定める.

**補題 12.3** (くりこみ群の固定点付近でのくりこみ群の評価).  $D \subset \mathbb{C}^2$  が  $\mathbb{C}^2$  に  $\mathbb{C}$  から自然に入る位相に関してコンパクトであるとし,  $a$  を  $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$  の固定点とすると, ある  $C > 0$  が存在して以下を満たす; 任意の  $w \in D$  に対して,

$$|\Phi_1(a+w) - \Phi_1(a)|_* \leq \lambda(1 + C|w|_*)|w|_*.$$

**補題 12.4** (くりこみ群の固定点付近でのくりこみ群の評価 (その 2)).  $\Phi_n = (\Phi_n^1, \Phi_n^2)$  とするとき,

$$w_n := \Phi_n(a+w) - \Phi_n(a) = \Phi_n(a+w) - a$$

と表すと,  $n \in \mathbb{N}$  を固定したとき,  $|w|_* \leq b\lambda^{-n}$  ならば, 任意の  $1 \leq k \leq n$  に対して,

$$\begin{aligned} |w_k|_* &\leq \lambda^k |w|_* \prod_{j=0}^{k-1} (1 + C\lambda^{-(n-j)}) \\ &\leq \frac{\lambda^k |w|_*}{b} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし  $C$  は先の補題の  $C$  であり,  $b > 0$  は

$$b \prod_{k=0}^{\infty} (1 + C\lambda^{-k}) \leq 1$$

を満たす定数とする.

## 12.2 重複対数の法則について

次に補遺に回すとしていた, 重複対数の法則の証明について述べる. まずは上からの評価である. ただし, 表記を簡単にするために  $\eta, \mu_1$  等といった記号は省いて書いてあることに注意する.

**命題 12.5** (命題 10.1). ある正の定数  $C_{12}$  が存在して,  $\psi(n) := n^\nu (\log \log n)^{1-\nu}$  とするとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \leq C_{12}, \quad P - a.s.$$

が成り立つ.

**証明.**  $\hat{\mu}_N$  を  $P$  の下での  $\lambda^{-N} T_{0,1}^{ex,N}(X)$  の分布とする. つまり,  $\hat{\mu}_N := P \circ (\lambda^{-N} T_{0,1}^{ex,N}(X))^{-1}$  と定義する. また,  $x > 1$  に対して,  $3^N \leq x \leq 3^{N+1}$  を満たすような  $N \in \mathbb{N}$  を固定する. このとき,  $k > 0$  を  $3^{-N} k \geq C_5$

を満たすようにとると,

$$\begin{aligned} \left(3^{(\frac{1}{\nu}-1)}\right)^N \left(\frac{3}{x}\right)^{1/\nu} k &= \left(3^{(\frac{1}{\nu}-1)}\right)^N \left(\frac{1}{3^N}\right)^{1/\nu} k = \left(3^{(\frac{1}{\nu}-1)}\right)^N \left(\frac{1}{3^N}\right)^{\frac{1}{\nu}-1} 3^{-N} k \\ &= 3^{-N} k \geq C_5 \end{aligned}$$

であるから, 命題 7.3 と命題 7.4(2) から,

$$\begin{aligned} P(\max_{0 \leq j \leq k} |X(j)| > x) &\leq P(T_{0,1}^{ex,N}(X) \leq k) \\ &= \hat{\mu}_N([0, \lambda^{-N} k]) \\ &\leq C_6 e^{-C_7(x k^{-\nu}/3)^{1/(1-\nu)}} \end{aligned}$$

となる. ここで  $\gamma > 1, A > 0$  とする. 任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $x = A\psi(\gamma^m)$  とし,  $k \in \mathbb{Z}_+$  を  $k \leq \gamma^{m+1}$  となるようにとる. このとき,  $m$  を十分大きくとれば  $k$  も大きくなるので,  $3^{-N} k \geq C_5$  が成り立つ. したがって  $k^{-\nu} \geq \gamma^{-m\nu} \gamma^\nu$  に注意すると,

$$\begin{aligned} P(\max_{0 \leq j \leq \gamma^{m+1}} |X(j)| > A\psi(\gamma^m)) &\leq C_6 \exp(-C_7(A\psi(\gamma^m)k^{-\nu}/3)^{1/(1-\nu)}) \\ &\leq C_6 \exp(-C_7 A^{\frac{1}{1-\nu}} \gamma^{\frac{-\nu}{1-\nu}} 3^{\frac{-1}{1-\nu}} \log \log \gamma^m) \\ &= C_6 \exp(\log(\log \gamma^m) - C_7 A^{\frac{1}{1-\nu}} \gamma^{\frac{-\nu}{1-\nu}} 3^{\frac{-1}{1-\nu}}) \\ &= C_6 (\log \gamma^m)^{-C_7 A^{\frac{1}{1-\nu}} \gamma^{\frac{-\nu}{1-\nu}} 3^{\frac{-1}{1-\nu}}} \\ &= C_6 \left(\frac{1}{m \log \gamma}\right)^{C_7 A^{\frac{1}{1-\nu}} \gamma^{\frac{-\nu}{1-\nu}} 3^{\frac{-1}{1-\nu}}} \\ &= \frac{c_1}{m^\alpha} \end{aligned}$$

となる. ここで,  $\alpha = C_7 \left(\frac{A}{3\gamma^\nu}\right)^{1/(1-\nu)}$  とおき,  $c_1 = C_6 (\log \gamma)^{-\alpha}$  が  $m$  に依らない正の定数であることに注意する. したがって, ある正の定数  $c_2$  があって,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} P(\max_{\gamma^m < j \leq \gamma^{m+1}} |X(j)| > A\psi(\gamma^m)) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} P(\max_{0 \leq j \leq \gamma^{m+1}} |X(j)| > A\psi(\gamma^m)) \\ &\leq c_2 + c_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} \end{aligned}$$

であるから  $\alpha > 1$  となるように  $A$  を十分大きくとれば,  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}$  は収束するのでボレル・カンテリの定理より,  $C_{12} = A$  として重複対数の上からの評価が成り立つ.  $\square$

以下では, 重複対数の下からの評価について論じる. 上からの評価では本質的にタウバー型定理から由来する確率測度の評価が証明の鍵となっていたが, 以下の議論もそれを用いて示していく. ただし上からの評価のように直接使えば直ちに結果が得られるわけではなく, いくつかの補題の準備が要る. 以下ではまず, その補題たちから論じてゆく.

**補題 12.6** (命題 10.2 を証明しやすくした形). もし, ある正の定数  $c$  が存在して,

$$P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{M=N}^{\infty} \{(\log M)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-M} T_{0,1}^{ex,M}(X) \leq c\}\right) = 1$$

が成り立つならば

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \geq c^{-\nu} \quad P - a.s.$$

が成り立つ.

証明. 補題の仮定の部分から, ほとんどいたるところの  $\omega \in \Omega$  に対して, ある増加列  $M'_k = M'_k(\omega), k = 1, 2, \dots$  を

$$(\log M'_k)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-M'_k} T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) \leq c$$

となるようにとることができる. この式ををまず  $\lambda^{M'_k}$  について整理し両辺の対数をとることによって,  $M'_k \geq 3$  に対して,

$$\begin{aligned} M'_k &\geq \frac{\log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) - \log c}{\log \lambda} + \frac{\frac{1-\nu}{\nu} \log \log M'_k}{\log \lambda} \\ &\geq \frac{\log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) - \log c}{\log \lambda} \end{aligned}$$

を得る. また, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $f(x) = \frac{x - \log c}{\log \lambda} - x^{1-\varepsilon}$  とおくと, 十分大きい  $x > 0$  に対して  $f'(x) = \frac{1}{\log \lambda} - (1 - \varepsilon) \frac{1}{x^\varepsilon}$  を正にすることができるので, 十分大きい  $x > 0$  に対して  $f(x) > 0$  とすることができる. したがって, ある  $k_0 \in \mathbb{N}$  が存在して,  $k \geq k_0$  なる任意の  $k$  に対して,

$$(\log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))^{1-\varepsilon} \leq \frac{\log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) - \log c}{\log \lambda} \leq M'_k$$

であるから  $\log$  をとれば,

$$(1 - \varepsilon) \log \log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) \leq \log M'_k$$

を得る. 一方で,  $(\log M'_k)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-M'_k} T_{0,1}^{ex, M'_k}(X) \leq c$  の両辺を  $\nu$  乗し,  $\lambda^\nu = 3$  に注意すれば,

$$|X(T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))| = 3^{M'_k} \geq c^{-\nu} (\log M'_k)^{1-\nu} (T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))^\nu$$

を得る. 以上のことを合わせれば,

$$\frac{|X(T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))|}{(T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))^\nu (\log \log T_{0,1}^{ex, M'_k}(X))^{1-\nu}} \geq c^{-\nu} (1 - \varepsilon)^{1-\nu}$$

を得る. したがって,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X(n)|}{\psi(n)} \geq c^{-\nu} (1 - \varepsilon)^{1-\nu}$$

であるから,  $\varepsilon$  の任意性から補題の主張を得る. □

今示したことから, 補題 12.6 の仮定が成り立つことを調べれば, 重複対数の法則の下からの評価が示されたことになる. したがって以下では, 補題をいくつか示したのち, 補題 12.6 の仮定が成り立つことを調べる. 以下では表記を簡単にするために,  $T_{0,1}^{ex, M}$  を  $T^M$  と略記する. 命題 7.2(2) より,  $G_N^r(-1)$  は  $g_r(-1)$  に  $r = 1, 2, N \rightarrow \infty$  で収束するから, ある正の定数  $D$  があって,  $r = 1, 2, N \in \mathbb{N}$  で,  $G_N^r(-1) \leq D$  とすることができる. このこととチェビシエフの不等式から

$$\hat{P}_N^{0, (j)}(T^N(w) \geq t) \leq D e^{-\lambda^{-N} t}, \quad N \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3, 4$$

が成り立つ。特に,

$$\hat{P}_N^{max}(A) := \max_{j=1,2,3,4} \hat{P}_N^{0,(j)}(A), \quad A \subset \Gamma_N^0$$

と定義すれば,

$$\hat{P}_N^{max}(T^N(w) \geq t) \leq De^{-\lambda^{-N}t} \quad (c)$$

を得る。また命題 7.3 と命題 7.4(1) からある正の定数  $C$  が存在して, 任意の  $b > 0$  と  $j = 1, 2, 3, 4$  に対して  $\alpha_N = b(\log N)^{-(1-\nu)/\nu}$  とおくと

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \alpha_N^{\nu/(1-\nu)} \log \hat{P}_N^{0,(j)}(T^N(w) \leq \lambda^N \alpha_N) \geq -C$$

が成り立つ。すなわち, ある  $N' \in \mathbb{N}$  から先の無限個の  $N > N'$ ,  $N \in \mathbb{N}$  に関して

$$\inf_{N < k} \{\alpha_k^{\nu/(1-\nu)} \log \hat{P}_k^{0,(j)}(T^k(w) \leq \lambda^k \alpha_k)\} \geq -C$$

であるから, 任意の  $C_0 > C$  に対してある  $N_0 \in \mathbb{N}$  が存在して,  $N_0 \leq N$  なる任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対して

$$\hat{P}_N^{0,(j)}(T^N(w) \leq b\lambda^N(\log N)^{-(1-\nu)/\nu}) \geq N^{-C_0 b^{-\nu/(1-\nu)}}$$

が成り立つ。特に

$$\hat{P}_N^{min}(A) := \min_{j=1,2,3,4} \hat{P}_N^{0,(j)}(A), \quad A \subset \Gamma_N^0$$

と定義すれば,

$$\hat{P}_N^{min}(T^N(w) \leq b\lambda^N(\log N)^{-(1-\nu)/\nu}) \geq N^{-C_0 b^{-\nu/(1-\nu)}}, \quad N \geq N_0 \quad (d)$$

が成り立つ。ここで導かれた, 式 c と式 d は以下で示す補題を示す中で役に立つ。また以下の補題では,  $t_n := 2C_0^{(1-\nu)/\nu} \lambda^n (\log n)^{-(1-\nu)/\nu}$ ,  $[\cdot]$  をガウス記号,  $\eta := \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2}{C_0^{(1-\nu)/\nu}}$  とするとき,

$$M_n := \left\lceil \frac{1}{\log \lambda} \left( 1 + \frac{2(1-\nu)}{\nu} \right) (n+1) \log \log(n+1) + (\eta+1)n \right\rceil$$

と定義する。この準備の下, 補題 12.6 の仮定が成り立つことを調べるための補題を準備する。

**補題 12.7.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T^{M_{n-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_n}) < \infty$$

**証明.**  $M_n$  の定義から,  $n \geq 2$  に対して

$$M_n - M_{n-1} \geq \frac{1}{\log \lambda} \left( 1 + \frac{2(1-\nu)}{\nu} \right) \log \log n + \eta$$

である。したがって,

$$\lambda^{-M_{n-1}} t_{M_n} / 2 = C_0^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{M_n - M_{n-1}} (\log M_n)^{-(1-\nu)/\nu} \geq 2 \log n \left( \frac{(\log n)^2}{\log M_n} \right)^{(1-\nu)/\nu}$$

が成り立つ。したがって,  $M_n = O(n \log \log n)$  であるから十分大きい  $n$  に対して,  $\lambda^{-M_{n-1}} t_{M_n} / 2 \geq 2 \log n$  が成り立つ。このことと式 c を合わせると,

$$P(T^{M_{n-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_n}) \leq \hat{P}_{M_{n-1}}^{max}(T^{M_{n-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_n}) \leq De^{-\lambda^{-M_{n-1}} t_{M_n} / 2} \leq De^{-2 \log n} = \frac{D}{n^2}$$

が成り立つので  $\sum_{n=1}^{\infty} P(T^{M_{n-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_n})$  は収束する。  $\square$

補題 12.8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_{M_n}^{min}(T^{M_n}(w) - T^{M_{n-1}}(w) \leq \frac{1}{2}t_{M_n}) = \infty$$

証明. 式  $d$  において,  $b = C_0^{(1-\nu)/\nu}$  とおくと  $M_n$  の定義から  $n_0$  を十分大きくとれば

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_{M_n}^{min}(T^{M_n}(w) - T^{M_{n-1}}(w) \leq \frac{1}{2}t_{M_n}) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_{M_n}^{min}(T^{M_n}(w) \leq \frac{1}{2}t_{M_n}) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{M_n} \\ &\geq \frac{1}{\eta + 2 + \frac{1}{\log \lambda}(1 + 2^{\frac{1-\nu}{\nu}})} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n \log \log n} = \infty \end{aligned}$$

である. ただし 1 つ目の不等号は集合の包含関係に依る. □

これで準備が整ったので, 補題 12.6 の仮定が成り立つことを調べて行く.

$$P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{M=N}^{\infty} \{(\log M)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-M} T_{0,1}^{ex,M}(X) \leq 2C_0^{(1-\nu)/\nu}\}\right) = P\left(\bigcap_{\infty}^{k=1} \bigcup_{l=k}^{\infty} \{T^{M_l}(X) \leq t_{M_l}\}\right)$$

であるから,  $k < K$  となる任意の  $k, K \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) \leq t_{M_l}\}\right) &\geq P\left(\bigcup_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) \leq \frac{1}{2}t_{M_l}, T^{M_{l-1}}(X) \leq \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\} \cup \{T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\ &\geq 1 - P\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) - \sum_{l=k}^K P(T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}) \end{aligned} \tag{e}$$

が成り立つことに注意し, まず,

$$P\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \infty$$

が成り立つことを調べる.  $P$  の構成や  $\tilde{P}_N$  の定義を思い出せば,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) &= \tilde{P}_{M_K}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(w) - T^{M_{l-1}}(w) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\ &= P_{M_K}^{rw}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\ &= \frac{491}{1248}(P_{M_K}^{0,(1)} + P_{M_K}^{0,(2)})\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\ &\quad + \frac{133}{1248}(P_{M_K}^{0,(3)} + P_{M_K}^{0,(4)})\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \end{aligned}$$

であることに注意する.  $M_n$  は  $n$  について単調増加であることに注意すると,  $M_k < M_K$  であり,



$$\begin{aligned}
& P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\
&= \sum_{w' \in \Gamma_{M_K - M_k}^0} P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\} | 3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w'\right) \\
&\quad \times P_{M_K}^{0,(1)}(3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w') \\
&= \sum_{w' \in \Gamma_{M_K - M_k}^0} P_{M_K}^{0,(1)}(T^{M_k}(Lw) - T^{M_{k-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_k} | 3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w') \\
&\quad \times P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k+1}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\} | 3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w'\right) P_{M_K}^{0,(1)}(3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w') \\
&= \sum_{w' \in \Gamma_{M_K - M_k}^0} \hat{P}_{M_k}^{0,r(M_k)}(T^{M_k}(w) - T^{M_{k-1}}(w) > \frac{1}{2}t_{M_k}) \\
&\quad \times P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k+1}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\} | 3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w'\right) P_{M_K}^{0,(1)}(3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w') \\
&\leq \hat{P}_{M_k}^{max}(T^{M_k}(w) - T^{M_{k-1}}(w) > \frac{1}{2}t_{M_k}) \\
&\quad \times \sum_{w' \in \Gamma_{M_K - M_k}^0} P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k+1}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\} | 3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w'\right) P_{M_K}^{0,(1)}(3^{-M_k} \hat{Q}_{M_k}(w) = w') \\
&\leq \hat{P}_{M_k}^{max}(T^{M_k}(w) - T^{M_{k-1}}(w) > \frac{1}{2}t_{M_k}) P_{M_K}^{0,(1)}\left(\bigcap_{l=k+1}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right)
\end{aligned}$$

である．ただし 2 つ目の等号は命題 6.11 より，3 つ目の等号は命題 6.17 の証明内での  $\hat{Q}_N$  に関する注意と，命題 6.13 より従う． $j = 2, 3, 4$  に関しても同様にして，

$$\begin{aligned}
& P_{M_K}^{rw}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\
&\leq \hat{P}_{M_k}^{max}(T^{M_k}(w) - T^{M_{k-1}}(w) > \frac{1}{2}t_{M_k}) P_{M_K}^{rw}\left(\bigcap_{l=k+1}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right)
\end{aligned}$$

となるから、これを繰り返せば、補題 12.8 より

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) - T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) &= P_{M_K}^{rw}\left(\bigcap_{l=k}^K \{T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}\}\right) \\
&\leq \prod_{l=k}^K \hat{P}_{M_l}^{max}(T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l}) \\
&= \prod_{l=k}^K (1 - \hat{P}_{M_l}^{min}(T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l})) \\
&\leq \exp\left(-\sum_{l=k}^K \hat{P}_{M_l}^{min}(T^{M_l}(Lw) - T^{M_{l-1}}(Lw) > \frac{1}{2}t_{M_l})\right) \\
&\rightarrow 0 \quad (K \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ。また、補題 12.7 より  $\sum_{l=k}^K P(T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l})$  においてまず  $K \rightarrow \infty$  してから  $k \rightarrow \infty$  することにより、

$$\sum_{l=k}^K P(T^{M_{l-1}}(X) > \frac{1}{2}t_{M_l}) \rightarrow 0$$

を得るので、式 (e) の最右辺は 1 に収束する。したがって、

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{M=N}^{\infty} \{(\log M)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-M} T_{0,1}^{ex,M}(X) \leq 2C_0^{(1-\nu)/\nu}\}\right) &= P\left(\bigcap_{\infty}^{k=1} \bigcup_{l=k}^{\infty} \{T^{M_l}(X) \leq t_{M_l}\}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{l=k}^K \{T^{M_l}(X) \leq t_{M_l}\}\right) = 1
\end{aligned}$$

を得るので、補題 12.6 の仮定が成り立つ。つまり命題 10.2 を得る。

## 12.3 計算に用いたソースコード

計算に用いた maxima のソースコードを載せておく。

```
--> N:matrix([0,1/4,1/4,1/4,1/4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], 隣接行列を入力
[1/4,0,0,1/4,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1/4,0,0,0,1/4,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1/4,1/4,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,1/4,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0],
[0,0,1/4,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0],
[0,1/6,0,1/6,0,1/6,0,0,0,1/6,0,0,0,1/6,0,1/6,0,0,0],
[0,0,1/6,0,1/6,0,1/6,0,0,0,1/6,0,0,0,1/6,0,1/6,0,0],
[0,0,0,1/4,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4,0],
[0,0,0,0,1/4,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4],
[0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,1/4,0,0,0,1/4,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,1/4,0,0,0,1/4],
```

```

[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0,0,0,0,1/4,0,0]);

--> S:matrix_size(N)[1];          隣接行列の行数を測る

--> Tr:[]$          上向き三角形の配列を得る
Tr:endcons([1,2,4],Tr)$
NT:copymatrix(N)$
for i:2 while i<=S step 2 do(
  if i+2<=S then NT[i][i+2]:0,
  J:[],
  counterT:0,
  for j:i thru S do
    if NT[i][j]>0
      then(counterT:counterT+1,jtemp:j,J:endcons(jtemp,J)),
    if counterT#0 then( j0:J[1],Tr:endcons([i,j0,j0+2],Tr)
  )else i:S+1

);
kill(i,j);
LTr:length(Tr);

--> counterVer:0$   ループが通ってはいけない点を求めて出力
Ver0:[]$
for i:1 thru S do(
  for j:1 thru S do(
    if N[i][j]>0 then counterVer:counterVer+1
  ),
  if counterVer=2 then Ver0:endcons(i,Ver0),
  counterVer:0

);
Ver0e:sublist(Ver0,lambda([x],evenp(x)))$
esmal:lmin(Ver0e)$
Ver0e:sublist(Ver0e,lambda([x],x#esmal))$
Ver0e:cons(esmal,Ver0e)$
Ver0o:sublist(Ver0,lambda([x],oddp(x)))$
osmal:lmin(Ver0o)$
Ver0o:sublist(Ver0o,lambda([x],x#osmal))$
Ver0o:cons(osmal,Ver0o)$
kill(i,j);

--> P:[]$   パスを生成して配列として出力
Ptem:[]$
counterP:0$
P:endcons([1],P)$
for i:1 while i<=3*LTr do(
  for j:1 thru length(P) do(
    NP:copymatrix(N),
    pgen:P[j],
    lenpg:length(pgen),
    Pos:[],

```

```

        for k:1 thru S do(
            NP[Ver0e[1]][k]:0
        ),
        for l:1 thru lenpg do(
            for m:1 thru S do(
                NP[m][pgen[1]]:0
            )
        ),
        lastpg:last(pgen),
        for n:1 thru S do(
            if NP[lastpg][n]>0 and evenp(n) then(
                counterP:counterP+1,
                Pos:endcons(n,Pos)
            )
        ),
        if counterP=0 then Ptem:endcons(pgen,Ptem)
        else (
            posl:length(Pos),
            for h:1 thru posl do(
                padd:endcons(Pos[h],pgen),
                Ptem:endcons(padd,Ptem)
            )
        ),
        counterP:0,
        Pos:[]
    ),
    P:Ptem,
    Ptem:[]

);
P:sublist(P,lambda([x],last(x)=Ver0e[1]));
kill(i,j,k,l,h);

--> Kurikomi:[]$      <くりこみ群の項の計算
Kou:[]$
for i:1 thru length(P) do(
    w1:P[i],
    Lw1:length(w1),
    NW:copymatrix(N),
    for j:1 thru S do(
        for m:1 thru length(Ver0) do(
            NW[Ver0[m]][j]:0,
            NW[j][Ver0[m]]:0
        )
    ),
    kill(j,m),
    frh:[],
    for j:1 thru S do(
        frh:endcons(f_[j],frh)
    ),
    flh:[],
    for k:1 thru S do(
        flh:endcons(f_[k],flh)
    ),
    flh[1]:1,

```

```

kill(j,k),
eq:[],
flh:transpose(flh),
proNW:NW.flh,
for j:1 thru S do(
    eq:endcons(proNW[j][1]=frh[j],eq)
),
A:solve(eq,frh),
kill(j),
kaiW:[],
kaiW:endcons(rhs(A[1][1]),kaiW),

for k:2 thru Lw1-1 do(
    NW:copymatrix(N),
    for j:1 thru S do(
        for m:1 thru length(Ver0) do(
            NW[Ver0[m]][j]:0,
            NW[j][Ver0[m]]:0
        )
    ),
    kill(j,m),
    for j:1 thru k-1 do(
        for l:1 thru S do(
            NW[w1[j]][1]:0,
            NW[1][w1[j]]:0
        )
    ),
    kill(j,1),
    frh:[],
    for j:1 thru S do(
        frh:endcons(f_[j],frh)
    ),
    flh:[],
    for l:1 thru S do(
        flh:endcons(f_[1],flh)
    ),
    flh[w1[k]]:1,
    kill(j,1),

    eq:[],
    flh:transpose(flh),
    proNW:NW.flh,
    for j:1 thru S do(
        eq:endcons(proNW[j][1]=frh[j],eq)
    ),
    A:solve(eq,frh),
    kill(j),
    kaiW:endcons(rhs(A[1][w1[k]]),kaiW)
),
kill(k),
LkaiW:length(kaiW),
p:1,
pp:1,
for j:1 thru Lw1 do
    if w1[j]=Ver0e[2] then p:0,

```

```

for k:1 thru LkaiW do
    p:p*(1/(1-kaiW[k])),
for l:1 thru Lw1-1 do
    pp:pp*N[w1[l]][w1[l+1]],
pw1:(p*pp)/(1/4),
Kou:endcons(pw1,Kou),
kill(j,k,l),
kill(p,pp),

kaiV:[],
kaiV:endcons(kaiW[1],kaiV),
for k:2 thru Lw1-1 do(
    NV:copymatrix(N),
    NV[VerOe[2]][VerOe[2]]:kaiV[1]/2,
    for j:1 thru S do(
        NV[j][VerOe[1]]:0,
        NV[VerOe[1]][j]:0
    ),
    kill(j),
    for j:1 thru length(VerOo) do(
        for l:1 thru S do(
            NV[VerOo[j]][l]:0,
            NV[l][VerOo[j]]:0
        )
    ),
    kill(j,l),
    for j:1 thru k-1 do(
        for l:1 thru S do(
            NV[w1[j]][l]:0,
            NV[l][w1[j]]:0
        )
    ),
    kill(j),
    frh:[],
    for j:1 thru S do(
        frh:endcons(f_[j],frh)
    ),
    flh:[],
    for l:1 thru S do(
        flh:endcons(f_[l],flh)
    ),
    flh[w1[k]]:1,
    kill(j,l),

    eq:[],
    flh:transpose(flh),
    proNV:NV.flh,
    for j:1 thru S do(
        eq:endcons(proNV[j][1]=frh[j],eq)
    ),
    A:solve(eq,frh),
    kaiV:endcons(rhs(A[1][w1[k]]),kaiV)

```

```

),
kill(k),
LkaiV:length(kaiV),
p:1,
pp:1,
for i:1 thru LkaiV do
  p:p*(1/(1-kaiV[i])),
for l:1 thru Lw1-1 do
  pp:pp*N[w1[l]][w1[l+1]],
qw1:(p*pp)/((1/4)^2),
Kou:endcons(qw1-4*pw1,Kou),

counterTy:0,                      パスの通る三角形のタイプの個数を計算
for j:1 thru Lw1-2 do(
  w1cut:[w1[j],w1[j+1],w1[j+2]],
  smal1:lmin(w1cut),
  w1cut:sublist(w1cut,lambda([x],x#smal1)),
  smal2:lmin(w1cut),
  w1cut:sublist(w1cut,lambda([x],x#smal2)),
  smal3:w1cut[1],
  w1tr:[smal1,smal2,smal3],
  if member(w1tr,Tr) then counterTy:counterTy+1

),
typevector:[(Lw1-1)-2*counterTy,counterTy],
kill(j),
Kou:append(Kou,typevector),
Kurikomi:endcons(Kou,Kurikomi),
Kou:[]

);

```

## 参考文献

- [1] K. Hattori and M. Mizuno, "Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket", Stochastic processes and their applications 124 (2014) 566-585.
- [2] 服部哲弥" ランダムウォークとくりこみ群" 共立出版 (2004).
- [3] K. Hattori, " Displacement exponent for loop-erased random walk on the Sierpinski gasket", arXiv:1607.04954v1 [math.PR] 12 Jul 2016.
- [4] M. Shinoda, E. Teufl and S. Wagner, " Uniform spanning tree on Sierpinski graphs", Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 11 (2014) 737-780.